TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica

Numerieke Analyse CII (a108)
Numerike Methoden PDV (a255)
Vierde Serie
Opgaven Numerieke Wiskunde b.o. (a27c)
Tweede Serie
1994/95

1. Op het vierkant $(0,1) \times (0,1)$ wordt de Poissonvergelijking

$$-\Delta u = f \tag{1}$$

opgelost met behulp van het standaard 5-punts molecuul. Gebruik wordt gemaakt van schuine nummering. Laat zien, dat een diagonaalbloktridiagonale matrix ontstaat.

2. Een mogelijk iteratieproces voor het oplossen van $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is het iteratieproces van Jacobi. Als $A = D - L - U$, waarin D diagonaal, L onderdriehoek, U bovendriehoek, wordt het proces beschreven door:

$$\boldsymbol{x}^{n+1} = D^{-1}(L+U)\boldsymbol{x}^n + D^{-1}\boldsymbol{b} \tag{2}$$

   (a) Laat zien, dat als dit proces convergeert, dit een oplossing geeft van $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

   (b) Laat zien, dat als geldt

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \ , \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3}$$

   het proces van Jacobi convergeert. (Hint: gebruik stelling a2.8)

3. Zij A diagonaal-bloktridiagonaal. Laat zien, dat als ω groter wordt gekozen dan ω_{opt}, ale eigenwaarden van Q_ω complex zijn en dat geldt:

$$|\lambda_i| = \omega - 1 \ , \quad i = 1, 2, ..., n \ . \tag{4}$$

   (Gebruik Stelling 11.4). Waarom kun je hier geen gebruik maken van vuistregel 11.2?

4. De warmtegeleidings vergelijking in twee dimensies wordt opgelost met de ADI methode:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(A_x u^* + A_y u^n) + \frac{1}{2} f^n \tag{5}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = \frac{1}{2}(A_x u^* + A_y u^{n+1}) + \frac{1}{2} f^{n+1} \tag{6}$$

Hierin zijn $u^n, u^{n+1}, f^n, f^{n+1}$ vectoren, die de onbekenden resp. de brontermen bevatten op verschillende tijdsniveaus en A_x en A_y matrices die de tweede gedeelde differenties representeren in x- resp. y-richting. Vergelijk deze methode met die van Crank-Nicolson:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(A_x + A_y)(u^{n+1} + u^n) + \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n) \tag{7}$$

Laat zien, door eliminatie van de tussenstap u^*, dat de orde van het verschil tussen beide methoden (in Δt) gelijk is aan de orde van de locale afbreekfout van Crank Nicolson. Wat betekent dit voor de locale afbreekfout van ADI?

5. Oefening 16.5.

a27c en a108 inleveren vóór 1 april 1995