TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit der Technische Wisunde en Informatica

Opgaven
Numerieke Analyse CII (wi413)
Numerieke Methoden PDV (wi311)
1998/99 Serie 3

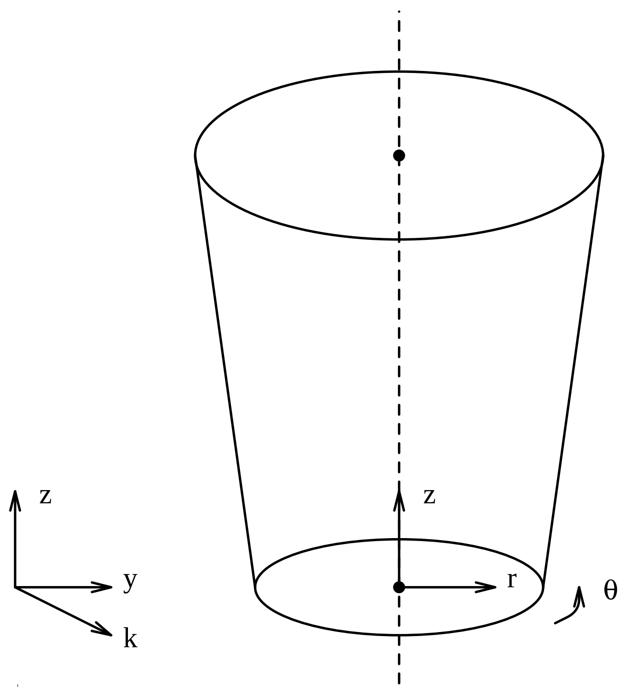

Figure 1: cilinder Ω

1. Binnen een cilinder $\Omega < I\!R^3$ is de convecti-diffusievergelijking gegeven:

$$-\Delta T + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = f \tag{1}$$

met $\boldsymbol{u}$ en f van de plaats afhankelijke grootheden.

De coefficienten $\boldsymbol{u}$ en f en de randvoorwaarden zijn onafhankelijk van de hoek Θ.

De randvoorwaarden van (1) luiden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \text{ op het ondervlak} \\ T &= 1 \text{ op de buitenmantel} \\ \frac{\partial T}{\partial n} + k(T - T_0) &= 0 \text{ op het bovenvlak} \end{aligned} \tag{2}$$

met k en T_0 gegeven konstanten.

(a) Laat zien dat de oplossing T van (1) onafhankelijk van Θ is.

(b) Leid voor $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ het bij (1) behorende equivalente minimaliseringsprobleem af.

(c) Hoe luiden de bijbehorende Ritzvergelijkingen?

(d) Voor $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ bestaat er geen equivalent minimaliseringsprobleem. Waarom niet?

(e) Geef een zwakke formulering van (1), (2), waarin afgeleiden van zo laag mogelijke orde voorkomen. (Galerkin)

(f) Aan welke randvoorwaarden moeten de test funkties voldoen?

(g) Leid de Galerkin vergelijkingen voor (1) en (2) af. Laat zien dat voor $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ deze identiek zijn aan de Ritzvergelijkingen in (c).

(h) Doe de EEM met behulp van de zwakke formulering in (e). Neem basisfunkties die lineair zijn in r en z en konstant in Θ. De bijbehorende elementen zijn dus cirkelvormig en hebben een driehoekige doorsnede in het $\Theta = 0$, $r \geq 0$ vlak.

   i. Laat zien hoe het matrix element s_{ij} van de elementmatrix behorend bij het element kan uitgedrukt in de coördinaten van de hoekpunten en de functiewaarden van $\boldsymbol{u}$ in de hoekpunten.

   ii. Bereken de elementenvector van het driehoekige element.

   iii. Bereken de elementmatrix en elementvector van het randelement. (lijnelement)

   Maak voor deze onderdelen gebruik van de Newton-Côtesregel.

wi413 inleveren vóór 1 maart 1999.