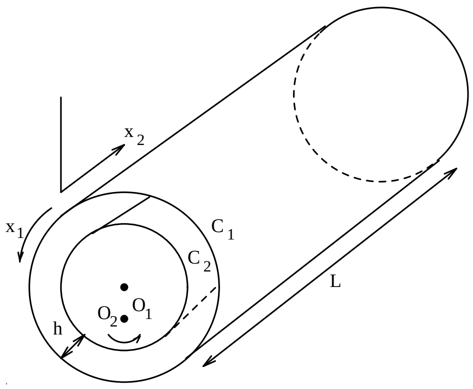
TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Informatietechnologie en Systemen

Practicum Opgave 1.10.1
Numerieke Analyse CII (wi4014)
Numerieke Methoden PDV (wi3001)



De Reynoldsvergelijking beschrijft de druk in een smeringsvloeistof (bijv. olie) tussen 2 cilinders. Beschouw het olielager uit de figuur waarin 2 cilinders c_1 en c_2 met parallelle assen, doch verschillende oorsprong O_1 en O_2. De binnenste cirkel c_2 draait met constante hoeksnelheid w rond. De afstand tussen de 2 cilinders wordt gegeven door $h(x_1)$.

De stroming in het lager kan beschreven worden door de algemene Navier-Stokes vergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn echter gecompliceerd om op te lossen en men probeert ze vaak te benaderen.
In een lager is de afstand h klein t.o.v. de lengte L en de diameter D van het buitenoppervlak en kan men volstaan met de zogenaamde smal kanaal benadering van de Navier-Stokes vergelijkingen. Hiertoe wordt het buitenoppervlak als het ware opengeknipt en afgebeeld op de rechthoek $(x_1, x_2) \in (0, \pi D) \times (0, L)$. De druk in de "$h$" richting wordt constant verondersteld en met dimensieanalyse volgt dat de druk bij benadering voldoet aan de zgn. Reynoldsvergelijking:

$$\mathrm{div}(-\frac{h^3}{12\mu}\nabla p + \frac{h}{2}\boldsymbol{u}) = 0 \ . \tag{1}$$

Hierin is p de druk μ de dynamische viscositeit, h de afstand tussen de cilinders en $\boldsymbol{u}$ een gegeven snelheid.

Voor een berekening is het voldoende het gebied $0 \leq x_2 \leq L/2$ te beschouwen, omdat de drukopbouw symmetrisch is rond het vlak $x_2 = L/2$.

Op de randen $x_1 = 0$ en $x_1 = \pi D$ gelden periodieke randvoorwaarden vanwege het feit dat de cilinder is "opengeknipt". Op de rand $x_2 = 0$ geldt dat de druk gelijk aan de buitendruk is, welke we gelijk aan $p = 0$ veronderstellen.

Opgave:

a. Leid het minimaliseringsprobleem behorend bij de differentiaalvergelijking (1) af.
   Op de symmetrie-as $x_2 = L/2$ geldt een symmetrie randvoorwaarde, welke als een homogene natuurlijke randvoorwaarde mag worden beschouwd. Beredeneer hoe de periodieke randvoorwaarde verwerkt moet worden.

b. Hoe luidt de natuurlijke randvoorwaarde op de symmetrie as?

c. Hoe luiden de periodieke randvoorwaarden?

d. Benader de oplossing van (1) m.b.v. de methode van Ritz. Leid het stelsel Ritzvergelijkingen af.

e. Leid de elementmatrix en elementvector voor het stelsel Ritzvergelijkingen af, indien lineaire driehoeken worden gebruikt.

f. We gaan uit van de volgende fysische gegevens:

$h(x_1, x_2) = 8.2_{10^{-5}}(1 - e \ \cos \frac{2x_1}{D}) \ m$
$D = 0.05 \ m$
e wordt resp. 0.001, 0.1, 0.5 en 0.95 gekozen
$\mu = 0.04 \ Ns/m^2$
$u_1 = 2.04 \ m/s$
$u_2 = 0 \ m/s$
$L = 0.05 \ m$

Hierbij is e de excentriciteit van de twee cilinders.

Bereken de druk met behulp van het SEPRAN pakket en maak een contourplot.

g. Voor de praktijk is de stabiliteit van een lager essentieel. Grootheden waaraan men deze meet zijn de zgn. load $\boldsymbol{f}$ de attitude angle φ, en het Sommerfeld getal S, gegeven door

$f_h = \int\limits_\Omega -p \ \sin \frac{2x_1}{D} d\Omega$ (horizontale component)
$f_v = \int\limits_\Omega -p \ \cos \frac{2x_1}{D} d\Omega$ (verticale component)
$|f| = \sqrt{f_h^2 + f_v^2}$
$\tan \ \varphi = f_h / f_v$
$S = \frac{2\pi |f|}{100L}$

Beredeneer waarom $f_v = 0$.

Bereken $f_h, f_v, |f|, \varphi$ en S m.b.v. SEPRAN.

h. Als de excentriciteit e toeneemt wordt de gradient van de druk steeds groter. Verifieer dit voor de 4 waarden van e.
Een techniek om stijle gradienten vermijden is over te gaan op een nieuwe onbekende $P = ph^2$.
Leid de DV (1) af in de nieuwe onbekende P.

i. Voor de onder h. afgeleide vergeijkingen bestaat geen equivalent minimaliseringsprobleem. Waarom niet?
Leid de zwakke formulering als mede de Galerkin vergelijkingen af.

j. Los het probleem nu op voor P en transformeer het resultaat naar p.
Vergelijk de resultaten met de oorspronkelijke formulering.
Gebruik de waarden van f_h en f_v om de nauwkeurigheid van de methode te bepalen.
Voer dit uit voor een grove mesh en voor enkele mesh verfijning. Gebruik de waarde van de fijnste mesh als referentiewaarde.

Wat is de conclusie?