TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT DER ELECTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE ANALYSE C1 (wi2021TA)
donderdag 18 december 2003 9:00-12:00

1. Gegeven is de predictor corrector formule:

$$k_1 = hf(x_j, u_j) \tag{1}$$
$$k_2 = hf(x_j + \alpha h, u_j + \alpha k_1) \tag{2}$$
$$u_{j+1} = u_j + (1-\beta)k_1 + \beta k_2 \tag{3}$$

voor het integreren van de DV $y' = f(x, y)$.

   (a) Toon aan, dat de lokale afbreekfout $O(h^3)$ is als $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ en anders $O(h^2)$.
   (b) Bepaal de versterkingsfactor van deze methode.
   (c) Men gebruikt de methode voor het integreren van het stelsel:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t) \tag{4}$$

   Hierin is $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ en $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))^T$. Laat zien, dat dit stelsel alleen stabiel geïntegreerd kan worden als $\alpha\beta > \frac{1}{2}$. Geef voor dit geval een stabiliteitscriterium.
   (d) Laat zien, dat integratie van het stelsel onder b) met de methode van Crank-Nicolson neutraal stabiel is, dat wil zeggen $|C(\lambda h)| = 1$

2. (a) Bewijs voor $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ en $n \times m$ matrices A:

$$\|A(\boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{b}\|^2 = \|A\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{b}\|^2 + \|A\Delta\boldsymbol{\xi}\|^2 + 2(A\Delta\boldsymbol{\xi}, A\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{b}). \tag{5}$$

   (Aanwijzing: $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\|^2$.)
   (b) Bewijs, dat als $A^T A\boldsymbol{\xi} = A^T\boldsymbol{b}$, voor elke $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ geldt:

$$\|A\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{b}\| \leq \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|. \tag{6}$$

   (Aanwijzing: Stel $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}$ en maak gebruik van het resultaat onder a.)
   Leid hieruit af, dat de kleinste kwadraten oplossing van $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ wordt gegeven door:

$$A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$$

   (c) Er is onderzoek geweest naar letsel bij auto-ongelukken. In de tabel staat het gemiddelde gewicht (m) van een bepaalde klasse auto uitgezet tegen het percentage (p) van botsingen waarbij ernstig letsel optrad.

Type	Massa (m)	Percentage (p)
topmodel	2500 kg	2
middenklasse	1500 kg	6
compact	1000 kg	8

   Bepaal een lineair verband $p = a_1 m + a_2$, dat in kleinste kwadraten zin zo goed mogelijk aansluit bij de metingen.
   (d) Nadat airbags verplicht zijn gesteld nemen alle percentages af met 25% van hun oorspronkelijke waarde. Bepaal voor deze situatie opnieuw a_1 en a_2.