Hoofdstuk 4

Continue Dynamische Modellen

Kern 1 Dynamische modellen

Van gewone taal naar formuletaal ....

(Plaatje van kegel, bol etc)

1 a Voor de inhoud I en de hoogte h van een kegel geldt $I = c_k \cdot h$. Bereken c exact.

b Als je van een kegel de hoogte laat variëren (en het grondvlak vast laat), verandert ook de inhoud. Laat zien, dat de *verhouding* $\frac{I}{h}$ tussen inhoud en hoogte niet verandert.

c Voor de inhoud I van een bol geldt $I = c_b \cdot r^3$, waarin r de straal is. Wat is c_b? Laat zien dat de verhouding tussen inhoud en derde macht van de straal niet verandert.

Het quotiënt van twee grootheden wordt ook wel de *verhouding* tussen die twee grootheden genoemd. Is de verhouding tussen twee grootheden *constant*, dan heten die grootheden *evenredig*. Die constante heet *evenredigheidsconstante*.

Is het *product* van twee grootheden constant, dan heten die grootheden *omgekeerd evenredig*.

Voorbeeld

▷ (Wet van Hooke) Als je een veer uitrekt, is de op de veer uit te oefenen kracht evenredig met de uitwijking. K = E x.

▷ (Gravitatiewet van Newton bij vaste afstand) De door twee lichamen op elkaar uit geoefende kracht is evenredig met het product van de massa's.

▷ (Electrostatische wet van Coulomb, bij vaste afstand) De door twee lichamen op elkaar uitgeoefende kracht is evenredig met het product van de ladingen.

---

2 a De tweede wet van Newton geeft een verband tussen de kracht K en de versnelling a: $K = ma$. Geef dit weer in woorden.

b Geef in een zin, waarin het woord „evenredig" voorkomt het verband tussen oppervlakte van een cirkel en de straal. Wat is de evenredigheidsconstante?

c De wet van Boyle geeft een verband tussen de druk P en het volume V van een gas. Formuleer de wet in woorden.

Een andere kijk op groei ....

3 a Een C^{14}-atoom heeft kans p om een α-deeltje deeltje uit te stralen tussen nu en over één minuut. Bereken hoeveel C^{14} atomen vervallen per minuut uit een brok met 10^{14} atomen. En uit een brok met 10^{15} atomen.

b Door het uitstralen van een alfa deeltje gaat het C^{14} atoom over in iets anders. Het aantal C^{14} atomen neemt dus af. Waarmee is die afname per minuut evenredig? Wat is de evenredigheidsconstante?

c Beredeneer, dat de *afnamesnelheid* van de hoeveelheid C^{14} evenredig moet zijn met de hoeveelheid C^{14} die op dat moment aanwezig is.

Een model dat een verband geeft tussen de *verandering* van een grootheid en die grootheid zelf heet een *dynamisch model.*
Verandert de grootheid continu, dan bestaat het model uit een verband tussen de afgeleide(n) en de functie. Het verband noemt men *differentiaalvergelijking* en het model heet een *continu dynamisch model.*
Verandert de grootheid sprongsgewijs, dan bestaat het model uit een verband tussen twee opeenvolgende toestanden. Zo'n model heet een *discreet* dynamisch model.

Voorbeeld

▷ Het radio-actief verval van C^{14} is een continu proces. De snelheid van het verval is evenredig met de hoeveelheid op dat moment. Noem de hoeveelheid C^{14} op tijdstip t $Q(t)$. De differentiaalvergelijking die het radioactieve verval beschrijft wordt dan:

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha Q$$

Dit is een continu dynamish model.
▷ Een kapitaal op een bankrekening staat uit tegen 4% rente per jaar. Ieder jaar wordt die rente bijgeschreven. Het kapitaal verandert dus sprongsgewijs. Het verband tussen opeenvolgende toestanden wordt gegeven door:

$$K_{n+1} = 1.04K_n$$

Dit is een discreet model.

---

4 a Een model voor exponentiële groei wordt ook gegeven door

$$Q(t) = Q(0)e^{-\alpha t}.$$

Waarom is dit geen dynamisch model?

b *En nog een vraagje over continu <-> discreet*

Kern 2 Groei als continu dynamisch model

Oplossingen van het model ....

5 Niet alle functies voldoen aan zo'n dynamisch model.

a Bereken de afgeleide van $Q(t) = e^{-\alpha t}$.

b Leg uit dat $Q(t)$ aan het dynamische model

$$\frac{dQ}{dt} = -\alpha Q$$

voldoet.

c Verifieer, dat hetzelfde geldt voor $3Q(t)$ en $-5Q(t)$.

Een *oplossing* van een differentiaalvergelijking is een functie, die voldoet aan het verband dat door de vergelijking gegeven wordt. Een differentiaalvergelijking heeft in het algemeen *meerdere* oplossingen.

Voorbeeld

De differentiaalvergelijking $\frac{dN}{dt} = 0$ heeft oplossingen $N(t) = 1$, $N(t) = -100$, maar ook $N(t) = 3141592$. *Elke* constante is een oplossing van deze differentiaalvergelijking.

---

6 a Geef twee verschillende oplossingen van $\frac{dQ}{dt} = 2Q$.

b Laat zien dat voor *elke* constante C de functie $Q = Ce^{2t}$ een oplossing is van deze differentiaalvergelijking.

c Deze constante C komt overeen met de Q op een bepaald tijdstip. Welk tijdstip?

Geremde groei. ....

Plaatje

7 We bekijken het opwarmen/afkoelen van een fles melk. De omgeving heeft een temperatuur van 19^{o}C. Voor de temperatuur T van de fles geldt de differentiaalvergelijking

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(19 - T).$$

Opmerking 1 *Deze is al afgeleid in de sommen van Kern 1*

a Als de begintemperatuur van de fles hoger is dan 19^{o}C koelt de fles af. Leg dit uit aan de hand van het model.

b Stel het verschil tussen omgevingtemperatuur en flestemperatuur $v = 19 - T$. Laat zien, dat voor v geldt

$$\frac{dv}{dt} = -\alpha v.$$

c Geef de oplossing van het model voor v. Wat is (dus) de oplossing van het model voor T?

Een dynamisch model voor *geremde* groei wordt gegeven door de differentiaalvergelijking

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(Q_{\max} - Q).$$

Hierin is de constante $Q_{\max}$ de maximale populatie die het milieu toestaat. De oplossingen van deze differentiaalvergelijking wordt gegeven door

$$Q_{\max} - Q(t) = (Q_{\max} - Q_0)(e^{-\alpha t})$$

ofwel

$$Q(t) = Q_{\max} - (Q_{\max} - Q_0)(e^{-\alpha t})$$

---

8 a Toon aan door terugsubstitutie, dat $Q = 1 - 0,5e^{-t}$ de oplossing is van $\frac{dQ}{dt} = 1 - Q, \quad Q(0) = 0,5.$

b Bereken exact $Q_{\max}$ en α in de differentiaalvergelijking $\frac{dQ}{dt} = 5 - 2Q$. Bepaal ook alle oplossingen.

Kern 3 Logistische groei

Een combinatie van exponentiële en geremde groei ....

9 Een griep–epidemie verspreidt zich over Nederland. De verspreiding van de ziekte gaat door *besmetting*. Ieder die in aanraking is geweest met een besmet persoon raakt zelf ook besmet. We gaan na hoe die besmetting in de tijd verloopt.

a In het begin zijn nog maar weinig personen besmet. In dat geval is de *toename* in besmette personen per tijdseenheid evenredig met het aantal besmette personen. Leg dat uit.

b Als een besmet persoon iemand tegenkomt, die zelf al besmet is, vindt natuurlijk geen besmetting plaats. Als de halve bevolking al besmet is en je ontmoet iemand, wat is dan de kans dat deze persoon besmet is?

c Een ontmoeting tussen twee personen kan zijn BB, NB, of NN. (B=besmet, N=niet besmet). Leg uit, dat de toename per eenheid van tijd in besmetten evenredig is met het aantal besmetten maal het aantal niet besmetten.

d Laat N de totale bevolking zijn en β het aantal besmetten. Formuleer een continu dynamisch model voor het aantal besmetten door deze epidemie.

Een groeimodel beschrijft de groei van een grootheid y. Is deze grootheid op natuurlijke wijze naar boven begrensd door een grens M, dan wordt de groei beschreven door de differentiaalvergelijking voor *logistische* groei:

$$\frac{dy}{dt} = c \cdot y(M - y)$$

Hierin is c een evenredigheidsconstante die van de actuele situatie afhangt.

---

10 a Geef aan welke grootheid in het model van de griepepidemie overeenkomt met y en welke met N.

b Wat is de natuurlijke bovengrens in de griepepidemie?

c In werkelijkheid kan de epidemie maar op één manier verlopen. Wat moet je allemaal nog weten om de $\beta(t)$ te bepalen die het werkelijke verloop beschrijft?

11 Een *fractie* geeft een gedeelte aan van de natuurlijke bovengrens M. Laat $\eta = \frac{y}{M}$.

a Laat zien, dat de differentiaalvergelijking voor η gegeven wordt door

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma\eta(1 - \eta)$$

b Druk γ uit in c en M.

De oplossing van de logistische vergelijking ....

12 Bekijk $\eta = \frac{1}{1+e^{-t}}$.

a Bereken de afgeleide van η.

b Laat zien, dat η voldoet aan de logistische vergelijking met $c = 1$ en $M = 1$.

c Teken de grafiek van η. Waar ligt de horizontale asymptoot? Verklaar dit.

De algemene oplossing van de logistische vergelijking

$$\frac{d\eta}{dt} = \gamma\eta(1-\eta)$$

wordt gegeven door

$$\eta = \frac{1}{1+Ae^{-\gamma t}}.$$

Hierin is A een nog nader te bepalen constante.

---

13 a Van de oplossing η van de logistische vergelijking met $M = 1$ is gegeven, dat $\eta(0) = 0,5$. Bereken A.

b Stel $\eta(0) = \eta_0$. Druk A uit in η_0.

c Geef de algemene oplossing van η, maar gebruik hierin η_0 en niet A. Controleer of inderdaad geldt $\eta(0) = \eta_0$.

Kern 4 Modelparameters

Schaling ....

14 a Teken de grafiek van de oplossing van het dynamisch model $Q' = -2(1 - Q)$, met $Q(0) = 2$.

b Teken ook de grafiek van de oplossing van $P' = -(1 - P)$ met $P(0) = 2$.

c Maak nu de t-schaal in de laatste grafiek tweemaal zo lang. Wat valt op? Verklaar dit uit de formules.

De in de modellen optredende constanten, ook wel *parameters* genoemd, hebben vaak het karakter van een *schaling*. Dat betekent, dat zij uit de formules verdwijnen door een geschikte keuze van de meet–eenheden.

Voorbeeld

Kies de eenheden in de vergelijking $\frac{dy}{dt} = c(M - y)$ zodanig, dat de parameters verdwijnen.
▷ Deel links en rechts door M, dit geeft

$$\frac{d\frac{y}{M}}{dt} = c(1 - \frac{y}{M})$$

▷ Kies dus $\frac{y}{M} = \eta$, dit geeft

$$\frac{d\eta}{dt} = c(1 - \eta)$$

▷ Kies $\tau = ct$, dit geeft

$$\frac{d\eta}{d\tau} = (1 - \eta)$$

---

15 a Bepaal de algemene oplossing η.

b Hoe krijg je hieruit de algemene oplossing y?

In de rest van de opgaven wordt ook nog de logistische vgl ontluisd tot

$$\frac{dQ}{dt} = Q(1 - Q)$$

want zo hoort het natuurlijk ook en dan begrijp je tenminste ook waarom die oplossing op het formuleblad er zo raar uitziet.

Beginvoorwaarde ....

16 plaatje van grafiekenschaar van $Q' = Q(1 - Q)$

a Teken de oplossing van $Q' = Q(1 - Q)$, waarvoor geldt $Q(0) = 0,5$.

b Is er een oplossing met $Q(0) = 0,5$ en bovendien $Q(1) = 0,6$?

Een dynamisch model zonder parameters heeft nog steeds meerdere oplossingen. Leg je de waarde van een oplossing in één punt vast, dan is er precies één functie die aan het dynamisch model voldoet. Zo'n punt wordt het *beginpunt* genoemd en de bijbehorende functiewaarde de *beginwaarde*.

In de dynamische modellen die wij hebben bekeken komen alleen eerste afgeleiden voor. Je kunt in die modellen de oplossing ook niet in meer dan één punt vastleggen, want dan is er geen functie meer die aan alle voorwaarden voldoet.

Voor het volledig beschrijven van een technisch-fysisch-biologisch probleem met behulp van een dynamisch model zijn er dus nodig:

1. De differentiaalvergelijking

2. De waarde van alle parameters

3. De beginvoorwaarde(n)

In dynamische modellen waarin x (een ruimte coördinaat) een rol speelt in plaats van t (een tijdcoördinaat) wordt de nevenvoorwaarde ook wel *randvoorwaarde* genoemd.

---

17 a Van de logistische dv $\eta' = \eta(1-\eta)$ wordt de oplossing gegeven door $\eta(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$. Wat is de beginwaarde op $t = 0$?

b Wat is de oplossing van bovenstaande vergelijking met beginwaarde $\eta(1) = 0,5$?

c Leg uit, dat als de beginwaarde gegeven wordt door $\eta(s) = 0,5$, de oplossing gegeven wordt door $\eta(t) = \frac{1}{1+e^{s-t}}$.

d Laat zien, dat dit neerkomt op een *verschuiving* van de oplossing langs de t-as.