Hoofdstuk 4

Continue Dynamische Modellen

Kern 1 Modellen

Statische en dynamische modellen. ....

1 Plaatje van concentrische cirkels

a Geef een formule die de oppervlakte O van een cirkel uitdrukt in de straal r.

b Een kapitaal staat uit tegen 5% rente per jaar. Op 1 januari 1999 bedraagt het K_0. Op 1 januari 2000 bedraagt het K_1. Druk K_1 uit in K_0.

c Na i jaar bedraagt het kapitaal K_i. Het jaar daarop K_{i+1}. Schrijf K_{i+1} als $K_{i+1} = K_i + \ldots$.

Vaak kan men een een grootheid uitdrukken in een formule die andere, meer elementaire grootheden bevatten. Men spreekt dan van een *wiskundig model.*
Een model, dat de grootheid *rechtstreeks* uitdrukt in andere grootheden heet een statisch model.
Een model dat de *verandering* van een grootheid uitdrukt in andere grootheden heet een *dynamisch* model.

Voorbeeld

▷ Het verband tussen de inhoud van een bol en zijn straal wordt gegeven door $I = \frac{4}{3}\pi r^3$. Dit is een statisch model.
▷ Het verband tussen afgelegde weg s en tijd t bij constante snelheid $v = 3$, $s = 3t$ is een statisch model.
▷ Het model

$$\frac{ds}{dt} = 3$$

is een dynamisch model. Het drukt de *verandering* van de afgelegde weg uit in andere grootheden.

---

2 De krant kopt „De wereldbevolking verdubbelt iedere 30 jaar.”

a Druk de wereldbevolking van nu uit in die van 30 jaar geleden.

b Druk de wereldbevolking van 60 jaar geleden uit in die van 30 geleden.

c Stel een dynamisch model op, dat de krantenkop wiskundig formuleert.

3 Uit de mechanica kennen we de volgende formules voor valwetten (met s de afgelegde weg, F de kracht, m de massa en g de versnelling van de zwaartekracht):

a $s = \frac{1}{2}gt^2$

b $F = m\frac{d^2s}{dt^2}$ (2e wet van Newton)

c $F = mg$

d Welke van deze formules zijn statische modellen en welke dynamisch?

4 Dennis spaart iedere week f 10,- van wat hij met zijn krantenwijk verdient. Hij zet dat niet op de bank, maar stopt het in zijn spaarpot, want hij is nou eenmaal een beetje suf.

a Druk de inhoud van zijn spaarpot in week i, S_i uit in de inhoud in de voorafgaande week, S_{i-1}.

b Geef ook een statisch model voor de spaarpotinhoud na i weken.

5 We beschouwen de rij 0,9; 0,99; 0,999; ....

a Stel $a_1 = 0,9$. Vul in: $a_i = 0,9 + ...a_{i-1}$.

b Vul in $1 - a_i = (...)^i$. Geef hieruit het functievoorschrift voor a_i.

c Wat is het statische en wat is het dynamische model?

Discrete en continue modellen ....

6 Uit een fonteintje stroomt 1 liter water per minuut. Doordat de afvoer verstopt is vormt zich een cirkelvormige plas van 1cm hoogte. De beginstraal van de plas is de diameter van het fonteintje: 10 cm.

Opmerking 1 *Plaatje boven aanzicht en zijaanzicht*

a Druk de straal na een minuut r_1 uit in de beginstraal r_0.

b Druk de straal na i minuten r_i uit in die van de minuut daarvoor, r_{i-1}.

c Doe hetzelfde, maar nu voor een tijdsinterval Δt.

d Laat zien, dat geldt: $\frac{r_i - r_{i-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\pi(r_i + r_{i-1})}$

e Druk $\frac{dr}{dt}$ uit in r.

Wanneer een dynamisch model bestaat uit een betrekking tussen opeenvolgende duidelijk onderscheidbare toestanden spreekt men van een *discreet* model. In een discreet model verandert de beschreven grootheid sprongsgewijs. Wanneer een dynamisch model een uitdrukking geeft voor de afgeleide(n) van een grootheid spreekt men van een continu dynamisch model. Deze uitdrukking heet *differentiaalvergelijking*. In een continu dynamisch model verandert de grootheid continu.

Voorbeeld

▹ Een kapitaal op een bankrekening staat uit tegen 4% rente per jaar. Ieder jaar wordt die rente bijgeschreven. Het kapitaal verandert dus sprongsgewijs. Het verband tussen opeenvolgende toestanden wordt gegeven door:

$$K_{n+1} = 1.04K_n$$

Dit is een discreet model.
▹ Een fles melk die uit de koelkast gehaald begint op te warmen en wel langzamer, naarmate het temperatuursverschil tussen fles en omgeving kleiner is. Dit wordt beschreven door het volgende dynamische model voor de flestemperatuur T en een omgevingstemperatuur van 19°C:

$$\frac{dT}{dt} = r(19 - T)$$

Hierin is r een constante die samenhangt met de warmtegeleidingseigenschappen van de fles en de warmetecapaciteit van de melk. Dit is een continu model.

7 In een cilindervormige beker *(zie plaatje)* wordt een vloeistof geschonken met een snelheid van 1 liter per minuut.

a Geef een discreet dynamisch model voor de vloeistofhoogte in de beker in iedere seconde.

b Geef een discreet dynamisch model voor de vloeistofhoogte in de beker voor tijdsintervallen Δt.

c Geef een continu dynamisch model voor de vloeistofhoogte.

8 In een kegelvormige vaas (zie plaatje) wordt vloeistof gegoten met een snelheid van 1 liter per minuut.

a Geef een discreet dynamisch model voor de vloeistofhoogte in de vaas in iedere seconde.

b Geef een discreet dynamisch model voor de vloeistofhoogte in de vaas voor tijdsintervallen Δt.

c Geef een continu dynamisch model voor de vloeistofhoogte.

9 Een piano heet *gelijkzwevend* gestemd, als voor de frequentie f_i van de toon, die wordt voortgebracht door de i^e toets geldt: $f_{i+1} = rf_i$, met r een vaste factor.

a Wat voor soort model is dit?

b Er geldt: $f_{i+12} = 2f_i$. Bepaal r.

10 Voor de groei van een organisme geldt voor het aantal individuen N: $\frac{dN}{dt} = 0.01N(1000 - N)$.

a Wat voor soort model is dit?

b Geef aan voor welke waarden van N het aantal individuen stijgt, respectievelijk daalt.

c Voor welke waarde(n) van N blijft het aantal individuen constant?

Kern 2 Opstellen van een model

Evenredigheid ....

11 Een kegel heeft een grondvlak met oppervlakte van 75 cm^2.

a De hoogte is 10 cm. Bereken de inhoud.

b Een andere kegel heeft hetzelfde grondvlak, maar is 3 maal zo hoog. Hoe groot is de inhoud?

c Van een kegel is de inhoud 490 cm^3. Een andere kegel heeft hetzelfde grondvlak, maar is 7 maal zo klein. Hoe groot is de inhoud?

Het quotiënt van twee grootheden A en B wordt ook wel de *verhouding* tussen A en B genoemd. Is de verhouding tussen A en B *constant*

$$\frac{A}{B} = c, \text{ dus } A = cB,$$

dan heten A en B *evenredig*. De constante c heet *evenredigheidsconstante*.

Voorbeeld

▷ De omtrek O van een cirkel is evenredig met de straal r: $O = cr$. De evenredigheidsconstante $c = 2\pi$.
▷ De op een voorwerp uitgeoefende kracht is evenredig met de versnelling van dat voorwerp: $F = ma$. (Tweede wet van Newton)
▷ De inhoud van een bol I is evenredig met de derde macht van de straal r: $I = cr^3$. De evenredigheidsconstante is $c = \frac{4}{3}\pi$.

---

12 a De oppervlakte van een driehoek O met basis lengte b is evenredig met de hoogte h. Bereken de evenredigheidsconstante en geef een formule voor O.

b Geef in een zin waarin het woord „evenredig" voorkomt het verband tussen de oppervlakte van een cirkel en de straal. Wat is de evenredigheidsconstante?

c De straal r van een bol is evenredig met de derdemachtswortel uit de inhoud. Bereken de evenredigheidsconstante.

13 a Twee exponentiële groeiprocessen N_1 en N_2 hebben dezelfde groeifactor g. Laat zien dat N_1 en N_2 evenredig met elkaar zijn.

b $N_1(0) = 6$ en $N_2(0) = 12$. Wat is de evenredigheidsconstante?

14 Een populatie bacteriën heeft grootte N. $\ln N$ is evenredig met de tijd t.

a Laat zien, dat N exponentieel groeit.

b Bereken de groeifactoren voor $c = 1$ en $c = \ln 2$.

15 a Van de de grootheden N en t zijn de natuurlijke logaritmen evenredig. De evenredigheidsconstante $c = 0,5$. Laat zien dat $N = \sqrt{t}$.

b Druk N uit in t als de evenredigheidsconstante 2 is.

Het opstellen van een differentiaalvergelijking. ....

16 *plaatje van cirkelringen* We bekijken de oppervlakte van een cirkel op een wel heel speciale manier, namelijk als dynamisch systeem. We hebben de cirkel onderverdeeld in ringen ter breedte Δr.

a Laat zien, dat de oppervlakte tussen twee opeenvolgende ringen r_i en r_{i+1} gelijk is aan de omtrek van de gestippelde cirkel maal de breedte Δr.

b Beschouw de oppervlakte O als functie van de straal r. Noem $O(r_i) = O_i$. Laat zien, dat $O_{i+1} = O_i + \pi\Delta r(r_i + r_{i+1})$.

c Formuleer dit als een uitdrukking voor het differentiequotiënt.

d Geef een uitdrukking voor $\frac{dO}{dr}$.

Een differentiaalvergelijking beschrijft de continue verandering van iets. Vaak is het handig om die verandering eerst te beschrijven voor een klein interval. Dit geeft een discreet dynamisch model. Laat dan de stap willekeurig klein worden. Dit geeft het continue model.

Voorbeeld

Geef een differentiaalvergelijking voor de oppervlakte O van een vierkant als de lengte x van de zijde verandert. *Plaatje van vierkant met extra strip. De hoekjes zwart maken*

▷ Teken een vierkant met zijde x.
▷ Teken een extra strip met breedte Δx.
▷ De oppervlakte van deze strip (zie plaatje) is $\Delta O = 4x\Delta x + 4\Delta x^2$.
▷ Deel links en rechts door $Delta x$:

$$\frac{\Delta O}{\Delta x} = 4x + \Delta x$$

▷ Laat Δx naar 0 gaan:

$$\frac{dO}{dx} = 4x$$

---

17 Geef een differentiaalvergelijking voor de verandering in oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek als de lengte van de zijde x verandert. Plaatje van driehoek met zwarte paralellogrammetjes in de hoekpunten.

18 Geef een differentiaalvergelijking voor de verandering in de oppervlakte O van een kubus als de lengte van de zijde x verandert.

19 a Geef een differentiaalvergelijking voor de verandering in de *inhoud* I van een kubus als de lengte x van de ribbe verandert

b Laat zien, dat $\frac{dI}{dx} = O$.

20 Van een rechthoek is de lange zijde tweemaal zo breed als de korte.

a Geef een differentiaalvergelijking voor de oppervlakte O van de rechthoek als de lengte van de korte zijde x verandert en de verhouding tussen de zijden gelijk blijft.

b S is de omtrek van de rechthoek. Laat zien, dat $\frac{dO}{dx} = S$.

Kern 3 Continue dynamische groeimodellen

Een andere kijk op groei . . . .

21 bacteriën op een petrischaaltje, plaatje.
We bekijken de groei van een bacterie kolonie als dynamisch model

a Door *celdeling* vermeerdert de kolonie zich. Leg uit, dat deze vermeerdering over een zeker tijdverloop evenredig zal zijn met het aantal aanwezige individuen.

b Een eenvoudig discreet model voor de toename van het aantal individuen ΔN over een periode Δt ziet er (dus) uit als

$$\Delta N = ...\Delta t.$$

c Wat is het continue dynamische model?

Een eenvoudig continu dynamisch model voor de groei van een populatie wordt gegeven door

$$\frac{dN}{dt} = cN$$

waarin c een evenredigheidsconstante is.

---

22 a Van een Indianenstam in Midden Amerika sterft jaarlijks 2,5%. Per jaar krijgt 4% van de vrouwen een kind. Formuleer een discreet dynamisch model van het aantal individuen in deze stam.

b Neemt het aantal individuen in de stam toe of af?

c Voor welke waarden van c neemt de populatie toe in het continue groeimodel? Voor welke waarden van c neemt de populatie af?

23 Radioactief verval is een proces, waarbij atomen in instabiele toestand straling uitzenden en overgaan in een ander, stabiel, atoom. Zo kan het instabiele C^{14} overgaan in ? onder uitzending van α-straling.

a Het aantal atomen dat straling uitzendt in een tijdsinterval Δt is evenredig met het totaal aantal aanwezige atomen. Leg uit, waarom de evenredigheidsconstante c tussen 0 en 1 ligt.

b Door het uitzenden van straling neemt het totaal aantal instabiele atomen af. Geef een discreet dynamisch model voor de verandering ΔN per tijds eenheid Δt.

c Geef ook een continu dynamisch model. Wat is het teken van de optredende evenredigheidsconstante?

24 De vertraging van een parachutist. Plaatje parachute.

a De op een parachutist werkende vertragingskracht F_v is evenredig met diens valsnelheid v met constante r. Geef een formule voor F_v. Waar zou r van afhangen, denk je?

b De versnelling van de zwaartekracht terplaatse is 10 m/sec^2. Geef een uitdrukking voor de totale kracht die op de parachutist werkzaam is in termen van diens massa m, r en v.

c Laat met behulp van Newton's tweede wet $F = ma$ zien, dat geldt

$$\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{r}{m}v$$

d Na verloop van tijd is de valsnelheid van de parachutist constant. Wat is die constante snelheid (uitgedrukt in m en r)?

25 Warmte stroomt van plaatsen van hoge temperatuur naar plaatsen van lage temperatuur.

a In de keuken is het 19°C. Een fles melk wordt uit de koelkast gehaald en heeft op dat moment een temperatuur T. De *warmtestroom* q van omgeving naar fles is evenredig met het temperatuursverschil tussen omgeving en fles. Geef een formule voor de warmtestroom. (Let op het teken!)

b De verandering in temperatuur van de fles per tijdseenheid is evenredig met de warmtestroom q. Druk $\frac{dT}{dt}$ uit in q.

c Geef een dynamisch model voor de temperatuur, waarin $\frac{dT}{dt}$, T, de omgevingstemperatuur en één evenredigheidsconstante voorkomen.

d Leg aan de hand van dit model uit, dat de temperatuur in de fles blijft stijgen zolang deze lager is dan de omgevingstemperatuur.

Logistische groei ....

26 *Plaatje vijver helemaal vol met lelies.* Hiernaast staat de grafiek van de groeicurve van een leliepopulatie.

a Voor welk tijdsinterval is er sprake van exponentiële groei?

b Wat is de grenswaarde van de populatie?

c Geef een aantal factoren aan die de grenswaarde van de leliepopulatie kunnen bepalen.

Ongeremde groei komt in de praktijk (bijna) niet voor. Een beter met de praktijk overeenkomend model is *logistische* groei. Deze kenmerkt zich door een exponentiële fase en een „geremde" fase. De resulterende kromme, wordt ook wel logistische kromme of S-kromme genoemd. Bovenstaande grafiek vormt hiervan een statisch model.

In logistisch groei treed altijd een grenswaarde N_∞ op, waarboven geen groei meer plaatsvindt.

---

27 a Tabel van logistische groei gegeven Laat zien dat de groeifactor de eerste ... uur ongeveer constant is

b Wat is de grenswaarde N_∞?

c Bekijk $N_\infty - N$. Laat zien, dat de groeifactor van $N_\infty - N$ vanaf ... uur ongeveer constant is.

28 Een dynamisch model voor logistische groei. Een geleerde onderzoeker in opleiding wil een dynamisch model opstellen voor logistische groei. Hij denkt daarbij aan iets van de vorm als $F = ma$, $E = mc^2$ of $V = IR$. Deze zijn echter allemaal al bedacht en bovendien niet erg dynamisch (of wel soms?, nou dan). Dus hij denkt aan iets als

$$\frac{dN}{dt} = f(N).$$

a Leg uit waarom $f(0) = 0$. Voor welke N geldt nog meer $f(N) = 0$?

b Voor t in de buurt van 0 geldt bij benadering $f(N) = aN$. Waarom?

c Hij probeert $f(N) = N(1 - \frac{N}{1000})$. Wat is N_∞ in dit geval?

29 Laat $f(N) = 0,002N(1 - \frac{N}{1000})$.
Opmerking 2 *Die 0,002 moet misschien wat anders zijn*

a Bereken met de GR de eerste 50 stappen van het discrete dynamische model

$$N_{k+1} = N_k + f_(N_k), \quad N_0 = 20.$$

b Zet de punten uit in een grafiek.

c Laat aan de groeifactoren voor k=1..5 en k=45..50 zien, dat de curve logistisch is.

30 Gegeven is $f(N) = N(1 - \frac{N}{5000})$

a Bepaal N_∞.

b Voor $t = 0$ is $N(0) = 20$. Laat zien, dat voor kleine t

$$\frac{dN}{dt} \approx 0,996N$$

in het logistische model.

c Voor N in de buurt van N_∞ geldt ten naaste bij

$$\frac{dN}{dt} = (5000 - N).$$

Verifieer dit aan de hand van nevenstaande grafiek.

Kern 4 Numerieke Oplosmethoden

De methode van Euler

31 Van een groeiproces $N(t)$ is het volgende dynamische model gegeven: $N' = -0,1N + \cos t$ en $N(0) = 20$. We maken een tabel van N voor oplopende waarden van t:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
N	20	19,7						
ΔN	-0,3							

a Bereken $N(0,1)$ met behulp van linearisering in $t = 0$, dat wil zeggen

$$\Delta N = N(0,1) - N(0) \approx \Delta t \cdot N'(0) = 0,1 \cdot (-0,1 \cdot 20 + 1) = -0,3$$

b Bereken op dezelfde wijze $N(0,2)$ uit de linearisering in $t = 0,1$.

c Bereken eveneens op deze manier $N(0,3) \ldots N(0,7)$.

Een functie $N(t)$ die aan een differentiaalvergelijking voldoet heet een *oplossing* van die differentiaalvergelijking. Zo'n oplossing is in het algemeen niet te schrijven in de vorm van een eenvoudige formule.
Eén manier om toch een indruk te krijgen van zo'n oplossing is met een *numerieke* benadering. Zo'n benadering construeert een *tabel* van benaderde functiewaarden van de oplossing.

Een eenvoudige methode om zo'n tabel te construeren werd bedacht door de befaamde Zwiterse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783). Zijn methode berekent de volgende waarde in de tabel met de linearisering van de huidige waarde. Als je een beginpunt hebt, kun je op die manier een tabel construeren, die zo ver doorloopt als je wilt.

Aanpak

Gegeven is de differentiaalvergelijking $y' = -y^2$. Maak een tabel van de numerieke oplossing voor $x = 0; 0,1; 0,2 \ldots; 0.9; 1,0$.

- ▷ $\Delta x = 0,1$
- ▷ Bereken $y'(0)$ uit de differentiaalvergelijking. $y'(0) = -(1)^2 = -1$.
- ▷ $\Delta y \approx y'(0) \cdot \Delta x = -0,1$.
- ▷ $y(0,1) = y(0) + \Delta y = 0,9$
- ▷ Herhaal de voorgaande drie stappen voor de nieuwe waarden van x en y

---

32 Schrijf de boven beschreven numerieke procedure als *discreet* dynamisch model, d.w.z. $y_{i+1} = y_i +$ .....

33 Pak je TR-83. Heb je geen TI-83? *Pik* een TI-83.
Toets in: 1 [ENTER]
Toets in: [2ND] [ANS] $-.1$ [2ND] [ANS] [x^2] [ENTER]
Druk nu enige malen op [ENTER]. Dit geeft de gevraagde tabel voor de DV in het kleurvlak.

a Leg dit uit.

b Wat verandert er in bovenstaande formule, als je de tabel wilt hebben voor $x = 0,05; 0,1; 0,15\ldots$?

34 a Bereken met de methode als beschreven in vraagstuk 0een numerieke oplossing van het exponentiële groeimodel

$$\frac{dN}{dt} = 0,1N, \quad N(0) = 1,$$

voor t = 0; 0,1; ...;0,9; 1.

b Wat is de groeifactor? Laat dat zowel uit je tabel als uit de formule zien.

35 a Bereken met de methode van Euler een numerieke oplossing voor het logistische groeimodel

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - \frac{N}{50}).$$

b Neem tijdstappen van 0,1. Hoe lang duurt het voordat $N > 0,9N_\infty$?

c Wat is de groeifactor voor kleine t? Klopt dat met de differentiaalvergelijking?

Van discreet naar continu ....

36 Een fles melk uit de koelkast heeft een temperatuur van 6°C. De keuken heeft een temperatuur van 19°C. De fles wordt in de keuken gezet en begint op te warmen volgens de differentiaalvergelijking (zie opgave 0)

$$\frac{dT}{dt} = 0,1(19 - T).$$

We bekijken de numerieke oplossing op $0 \leq t \leq 2$.

a Bereken de numerieke oplossing met tijdstappen $\Delta t = 0,2$. Wat is de groeifactor?

b Bereken de numerieke oplossing met tijdstappen van $\Delta t = 0,1$. Wat is nu de groeifactor?

c Zelfde vraag voor $\Delta t = 0,05$.

d Voor $T = 2$ heb je drie verschillende antwoorden gekregen. Welk antwoord is het beste?

Door de methode van Euler uit te voeren voor steeds kleinere tijdstappen wordt de oplossing niet alleen voor meer punten gevonden, maar deze oplossing wordt ook steeds *nauwkeuriger*, dat wil zeggen wijkt steeds minder af van de „echte" of exacte oplossing.

Een vuistregel voor de methode van Euler zegt: *Halveer je de stapgrootte, dan halveer je ook de fout in de numerieke oplossing.*

37 Van het dynamisch model

$$\frac{dN}{dt} = 0,1N; \quad N(0) = 1$$

wordt de exacte oplossing gegeven door $N(t) = e^{0,1t}$

a Verifieer dit.

b Bereken de numerieke oplossing op het interval (0,1) met stappen van 0,1 resp 0,05.

c Vergelijk de numerieke oplossingen bij $t = 2$ en verifieer, dat de vuistregel geldt.

38 Van het dynamisch model

$$\frac{dO}{dr} = 2\pi r, \quad O(0) = 0,$$

(zie opgave 0) wordt de „echte" oplossing gegeven door ...

a Nou?

b Bereken de numerieke oplossing voor 0<r<2 met stappen van $0,1$ resp $0,05$.

c Bereken het verschil van de numerieke oplossing en de exacte oplossing. Verifieer de vuistregel in alle punten waar twee numerieke oplossingen voorhanden zijn.

d Noem de exacte oplossing E(x), de nauwkeurigste numerieke oplossing N (x), de minder keurige oplossing O(x). Ga na, dat in alle punten waar O en N beide bekend zijn geldt:

$$E - N \approx N - O.$$

e Leg uit hoe je dat zou kunnen gebruiken wanneer de exacte oplossing *niet* bekend is.

39 De logistische vergelijking

$$\frac{dN}{dt} = 0,1N(1 - \frac{N}{100}), \quad N(0) = 20,$$

wordt op het interval 0<t<4 benaderd met de methode van Euler

a Neem eerst tijdstappen van 0,8, dan tijdstappen van 0,4.

b Halveer de tijdstap nogmaals, als de fout ergens groter is dan 0,1.

c Hoe groot schat je dat de tijdstap moet zijn om de fout overal kleiner te krijgen dan 0,1?