Hoofdstuk 5

Grafische en Numerieke Oplosmethoden

Kern 1 Grafische methoden

Het richtingsveld ....

Plaatje ?

1 Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

a Als er een oplossing door $P(1, 2)$ gaat, wat is dan de helling van de grafiek in dat punt? Teken een klein stukje van de raaklijn aan de grafiek in dat punt.

b Doe hetzelfde voor alle punten met gehele coördinaten in het vierkant met hoekpunten (-3, -3) en (3, 3) en zijden evenwijdig aan de coördinaatassen. (Misschien hier al Winplot of zo inschakelen)

Een differentiaalvergelijking van de algemene vorm

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

heeft vaak geen oplossing in de vorm van een eenvoudige formule. Maar voor elk punt in het $x-y$ vlak geeft hij de *helling* van de grafiek van de oplossing die door dat punt gaat. Een klein stukje raaklijn in zo'n punt heet *lijnelement*. Om een indruk te krijgen van de mogelijke oplossingen teken je alle lijnelementen op een regelmatig rooster. Dit heet een *lijnelementen–* of *richtingsveld*. Is de afgeleide in zo'n punt ∞ of $-\infty$ dan loopt het lijnelement vertikaal.

Voorbeeld

+ Plaatje sigma VI blz 100 Teken het richtingsveld van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$

2 Sigma VI, blz 6 som 2

a Gegeven zijn drie richtingsvelden *Plaatje 1, plaatje 2, plaatje 3*

b Elk van deze richtingsvelden corresponeren met één van de volgende drie differentiaalvergelijkingen:

1. $y' = \frac{x^2-4}{y}$
2. $y' = \frac{4-x^2}{y^2}$
3. $y' = \frac{4-x^2}{xy}$

Zoek de juiste differentiaalvergelijking bij elk veld.

Schetsen van een oplossing in het richtingsveld ....

3 a **Opmerking 1** *Hier moet ik nog een even goed over nadenken. Misschien moet je toch eerst Euler doen. En in ieder geval moet je ICT hulpmiddelen gebruiken. De TI-83 ?*

Gegeven is de differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$. Als een beginwaarde gegeven is, kun je in het richtingsveld de oplossingskromme schetsen, door in het beginpunt een stukje langs het lijnelement te lopen en er daarna steeds voor te zorgen, dat de kromme de gemiddelde richting heeft van de lijnelementen waar hij tussendoor loopt.

Voorbeeld

Opmerking 2 *nou maar weer eens wat anders dan die afgezaagde cirkel.* Richtings veld van $y' = \frac{x}{y}$, we starten in (1,1). Plaatje

---

4 a Schets het richtingsveld in het y, t–vlak van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ voor een 5x5 rooster op het vierkant $(0,1) \times (0,1)$

b Teken in dit richtingsveld de oplossing met beginwaarde $y(0) = 0,5$. Vergelijk je schets, met de exacte oplossing.

c Wat valt je op aan dit richingsveld? Verklaar dit uit de differentiaalvergelijking.

Kern 2 Van continu naar discreet

De methode van Euler ....

5 Van een groeiproces $N(t)$ is gegeven: $N' = -0,1N + \cos t$ en $N(0) = 20$. We maken een tabel van N voor oplopende waarden van t:

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
N	20	19,7						
ΔN	-0,3							

a Bereken $N(0,1)$ met behulp van linearisering in $t = 0$, dat wil zeggen

$$\Delta N = N(0,1) - N(0) \approx \Delta t \cdot N(0) = 0,1 \cdot (-0,1 \cdot 20 + 1) = -0,3$$

b Bereken op dezelfde wijze $N(0,2)$ uit de linearisering in $t = 0,1$.

c Bereken eveneens op deze manier $N(0,3) \ldots N(0,7)$.

Een andere methode om een indruk te krijgen van de oplossing van een (ingewikkelde) differentiaalvergelijking is met een *numerieke* benadering. Zo'n benadering construeert een *tabel* van benaderde functiewaarden van de oplossing.

Een eenvoudige methode om zo'n tabel te construeren werd bedacht door de befaamde Zwiterse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783). Zijn methode berekent de volgende waarde in de tabel met de linearisering van de huidge waarde. Als je een beginpunt hebt, kun je op die manier een tabel construeren, die zo ver doorloopt als je wilt.

Aanpak

Maak een tabel van de numerieke oplossing van $y' = -y^2$ voor $x = 0; 0,1; 0,2 \ldots; 0.9; 1,0$.

- ▹ $\Delta x = 0,1$
- ▹ Bereken $y'(0)$ uit de differentiaalvergelijking. $y'(0) = -(1)^2 = -1$.
- ▹ $\Delta y \approx y'(0) \cdot \Delta x = -0,1$.
- ▹ $y(0,1) = y(0) + \Delta y = 0,9$
- ▹ Herhaal de voorgaande drie stappen voor de nieuwe waarden van x en y

---

6 Pak je TR-83. Heb je geen TI-83? *Pik* een TI-83.
Toets in: 1 [ENTER]
Toets in: [2ND] [ANS] $-.1$ [2ND] [ANS] [x^2] [ENTER]
Druk nu enige malen op [ENTER]. Dit geeft de gevraagde tabel voor de DV in het kleurvlak.

a Leg dit uit.

b Wat verandert er in bovenstaande formule, als je de tabel wilt hebben voor $x = 0,05; 0,1; 0,15 \ldots$?

Grafisch en numeriek ....

Opmerking 3 *Nog een intro verzinnen. Iets in de geest als: welke recursieve rij hoort bij de methode van Euler, zodat de vorm* $u_n = u_{n-1} + 0,1 * u_{n-1}(1 - u_{n-1})$ *in het kleurvlak niet zomaar uit de lucht komt vallen.*

De TI-83 geeft een gemakkelijke methode om tegelijk de tabel *en* de grafiek van een numerieke oplossing uit te rekenen. Daartoe maak je gebruik van *recursieve rijen.* Zo'n recursieve rij is hetzelfde als een discreet dynamisch systeem: je drukt de waarde van deze stap uit in die van de vorige stap.

Aanpak

Bereken de tabel en teken de grafiek van $y' = y(1-y)$, $y(0) = 0,1$, met tijdstappen van 0,1. Neem 50 stappen.

- ▷ Pak je TI-83 en zet hem aan.
- ▷ Zet de functie modus op sequentieel. ($\boxed{\text{MODE}}$, vierde regel, vierde kolom)
- ▷ Druk op $\boxed{\text{Y=}}$ om de functie in te voeren:

  $$u(n) = u(n-1) + 0.1u(n-1)(1-u(n-1))$$

  Let erop, dat n wordt verkregen door de $\boxed{X, T, \theta, n}$-toets.
- ▷ Voer de beginwaarde in: $u(nMin) = 0,1$
- ▷ Druk op $\boxed{\text{WINDOW}}$. Zet $NMax = 51, XMin = 0, XMax = 50$
- ▷ Druk op $\boxed{\text{GRAPH}}$ voor de grafiek, $\boxed{\text{TABLE}}$ voor de tabel.

Vergeet niet de functiemodus weer op FUNC te zetten voor gewoon grafisch werk.

---

7 a Geef de grafische en numerieke oplossing van de differentiaalvergelijking

$$N' = -0,1N + sin2\pi t.$$

Neem $N(0) = 1$ en bereken de oplossing op het interval $[0,4]$ met stappen van 0,05.

Opmerking 4 *Misschien is die wat te moeilijk. Daar moeten we eerder mee eindigen eigenlijk. Kan dit met de Casio ook trouwens?*

Opmerking 5 *In de ICT pagina's kun je nog wel wat kwijt over het laten meelopen van* t *of* x *als tweede variabele en om de stapgrootte in het register* h *te zetten.*

Kern 3 Van discreet naar continu

Nauwkeurigheid van de methode van Euler ....

8 Bekijk de differentiaalvergelijking: $N' = -0,5N$ met beginvoorwaarde $N(0) = 1$.

a Maak een tabel voor de numerieke oplossing met stappen van 0,1. Noem deze oplossing $N^{(1)}$

b Eveneens met stappen van 0,05. Noem deze oplossing $N^{(2)}$

c Bereken ook de *exacte* oplossing in de tabelpunten.

d Ga na, dat voor *alle* tabelpunten waarvoor $N^{(1)}$ bekend is geldt:

$$|N - N^{(2)}| \leq |N^{(2)} - N^{(1)}|$$

De numerieke oplossing van de methode van Euler is een *benadering*. Deze verschilt van de exacte oplossing. Het verschil tussen de exacte en de benaderde oplossing heet de *fout* in de benadering. Het is van groot belang deze fout te schatten. Voor de methode van Euler is dit vrij eenvoudig. We berekenen de numerieke oplossing tweemaal, de tweede maal met de halve stapgrootte. Het verschil tussen deze twee oplossingen is een schatting van de fout. (Mits deze verschillen klein zijn).

Voorbeeld

Bereken de numerieke oplossing van $y' = 1/y$, $y(0) = 1$, met stappen van 0,1 en 0,05 voor het interval [0;0,5]. Schat de maximale fout.

We leggen een tabel aan:

t	$N^{(1)}$	$N^{(2)}$	ΔN
.05		.975	
.1	.95	.95063	.00063
.15		.92686	
.2	.9025	.90369	.00119
.25		.8811	
.3	.85738	.85907	.00169
.35		.83759	
.4	.81451	.81665	.00214
.45		.79624	
.5	.77378	.77633	.00255

De maximale fout op dit interval is dus zeker kleiner dan 0.003 voor de oplossing met de kleinste stap.

---

9 a Bereken de exacte oplossing van $y' = -0,5y$, met $y(0) = 1$.

b Ga na, dat de fout in $N^{(2)}$ voor alle punten kleiner is dan de berekende.

c Bereken ook nog de numerieke oplossing met stap 0,025. In welke punten kun je nu de fout schatten? Wat is de maximale fout?

Een andere kijk op e^x ....

10 Bekijk de differentaalvergelijking y'=y, met y(0) = 1

a Neem stap H en geef een *formule* voor de eerste stap uit de methode van Euler:

$$u_1 = 1 + ...$$

b Laat zien dat $u_2 = (1 + H)^2$

c Laat zien dat $u_n = (1 + H)^n$

d Doe hetzelfde voor de numerieke oplossing v_n met stap $h = \frac{H}{2}$.

e Welke u's en v's moet je met elkaar vergelijken?

Als je $y' = y$, $y(0) = 1$ oplost met de methode van Eulen op het interval [0, x] en je neemt n stappen, dan is je stapgrootte $h = \frac{x}{n}$.

Voor de numerieke oplossing in x, u_n geldt klaarblijkelijk:

$$u_n = (1 + h)^n$$

Als x vast is en we laten h klein worden (en dus n toenemen, omdat $nh = x$) gaat de numerieke oplossing naar de oplossing van de differentiaalvergelijking. Klaarblijkelijk geldt dus

$$(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$$

als n zeer groot wordt.

---

11 a Vul in

$$(1 + \frac{2x}{n})^n \to ...$$

b Is de methode van Euler een discreet of een continu dynamisch proces?

c Laat zien, dat voor h klein genoeg de waarde van de numeriek oplossing in $\frac{x}{2}$ óók willekeurig dicht komt te liggen bij de exacte oplossing.