Hoofdstuk 5

Differentiaalvergelijkingen

Kern 1 Oplossingen

Wat is een oplossing van een differentiaalvergelijking? . . . .

(Ik heb de volgorde van deze twee deelkernen omgewisseld vergeleken met het plan, om zo meteen te kunnen praten over de *helling van (de grafiek van) een oplossing*.)

Opmerking 1 *Hier maar een leuke cartoon of een mooie meid, anders wordt deze paragraaf wel erg saai*

1 Bekijk de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2y$.

a Differentieer de functie $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

b Leg uit dat geldt $f'(x) = 2f(x)$.

c Doe hetzelfde voor de functie $g(x) = 5\mathrm{e}^{2x}$.

Als een functie voldoet aan de door een differentiaalvergelijking gegeven betrekking, heet zo'n functie *een oplossing* van deze differentiaalvergelijking. Meestal heeft een differentiaalvergelijking meerdere oplossingen.

Aanpak

Is $f(x) = 6\mathrm{e}^{-3x}$ een oplossing van $\frac{dy}{dx} = -3y$?

- ▷ Bereken $f'(x)$. $f'(x) = -18\mathrm{e}^{-3x}$.
- ▷ Geldt $f'(x) = -3f(x)$? Ja, want $f'(x) = -18\mathrm{e}^{-3x} = -3 \cdot 6\mathrm{e}^{-3x} = -3f(x)$.
- ▷ Dus $f(x) = 6\mathrm{e}^{-3x}$ is een oplossing van $\frac{dy}{dx} = -3y$.

---

2 Geef aan welke van de volgende functies een oplossing is (zijn) van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = -6y$.

a $f(x) = \mathrm{e}^{-6x}$

b $g(x) = \mathrm{e}^{-6x} + 2$

c $h(x) = 5\mathrm{e}^{-6x}$

d $k(x) = 5\mathrm{e}^{-5x}$

3 Geef aan welke van de volgende functies een oplossing is (zijn) van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 1$.

a $f(x) = x$

b $g(x) = 5x$

c $h(x) = x + 5$

d $k(x) = x^2$

4 a Laat zien, dat $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

b Zelfde vraag voor $g(x) = -f(x)$.

c Teken f en g in één figuur.

d Geef *nog* een oplossing van deze differentiaalvergelijking.

5 a Laat zien, dat $f(x) = \sin x$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

b Is $g(x) = \cos x$ ook een oplossing?

c Geef *nog* een oplossing van deze differentiaalvergelijking.

Het richtingsveld ....

6 Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

a Bereken y' in het punt (1, 1)?

b Teken in het x-y vlak een lijnstukje door het punt $(1, 1)$ met de door y' gegeven helling.

c Doe hetzelfde voor de punten $(0, 1)$, $(1, -1)$ en $(2, 1)$

Een differentiaalvergelijking legt in elk punt van het x-y vlak een *helling* vast. Deze helling is de helling van de grafiek van de oplossing die door dat punt gaat. Een klein stukje raaklijn in zo'n punt heet een *lijnelement*. Om een indruk te krijgen van de mogelijke oplossingen teken je alle lijnelementen op een regelmatig rooster. Dit heet een *lijnelementen*– of *richtingsveld*.

Voorbeeld

Opmerking 2 *Plaatje Sigma VI blz 100* Het richtingsveld van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$

wordt gegeven door nevenstaand plaatje.

---

7 Sigma VI, blz 6 som 2

a Gegeven zijn drie richtingsvelden *Plaatje 1, plaatje 2, plaatje 3*

b Elk van deze richtingsvelden corresponeren met één van de volgende drie differentiaalvergelijkingen:

1. $y' = \frac{x^2-4}{y}$
2. $y' = \frac{4-x^2}{y^2}$
3. $y' = \frac{4-x^2}{xy}$

Zoek de juiste differentiaalvergelijking bij elk veld.

8 a Teken het richtingsveld in het y, t–vlak van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dt} = y(1-y)$ voor een 5x5 rooster op het vierkant $(0, 1) \times (0, 1)$

b Teken in dit richtingsveld de oplossing met die door $(0; 0, 5)$ gaat.

c Bereken ook de oplossing door dit punt met de methode van Euler. Hoe bereken je de oplossing voor negatieve waarden van t?

9 Profi, blz 6. Hieronder is het richtingsveld getekend van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = (x-y)^2$

a Op grond van dit richtingsveld, kun je vermoeden, dat er twee lineaire functies zijn die een oplossing zijn van de differentiaalvergelijking. Welke functies zijn dat?

b Laat door substitutie zien, dat de door jou gevonden functies inderdaad oplossingen zijn van de differentiaalvergelijking.

10 Profi, blz 6, gedeeltelijk. Gegeven is de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2x - y + 5$.

a Teken de verzameling van de punten (x, y), waar de lijnelementen positieve richtingscoëfficiënt hebben.

b Leg uit waarom *alle* oplossingen van de differentiaalvergelijking zullen dalen in het gebied $y > 2x + 5$.

c Bewijs met formules, dat de rechte lijnen $y = 2x + 5 - p$ punten met gelijke helling met elkaar verbinden. Laat dat ook zien in het richtingsveld.

d Voor welke p is zo'n lijn een oplossing van de differentiaalvergelijking?

Kern 2 De algemene oplossing

Oplossingsfamilies. ....

11 **Opmerking 3** *Plaatje richingsveld?*
Bekijk de differentiaalvergelijking voor exponentiële groei:

$$\frac{dy}{dt} = 2y.$$

a Laat zien, dat $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ een oplossing is van deze differentiaalvergelijking.

b Laat zien, dat $g(x) = 5\mathrm{e}^{2x}$ een oplossing is van deze differentiaalvergelijking.

c Laat zien, dat $h(x) = C\mathrm{e}^{2x}$, met C een willekeurige constante, een oplossing is van deze differentiaalvergelijking.

Een uitdrukking die meerdere oplossingen geeft van een differentiaalvergelijking heet *oplossingsfamilie* van zo'n differentiaalvergelijking. In de formule van zo'n oplossingsfamilie zit een nog onbepaalde constante. Voor elke waarde van de constante geeft de formule een oplossing van de differentiaalvergelijking. Geeft de oplossingsfamilie *alle* oplossingen van de differentiaalvergelijking, dan noemen wij dat de *algemene oplossing* van de differentiaalvergelijking.

Voorbeeld

▷ De differentiaalvergelijking $y' = x$ heeft als algemene oplossing

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

waarin C een willekeurige constante is.
▷ De differentiaalvergelijking $y' = -3y$ heeft als algemene oplossing

$$g(x) = C\mathrm{e}^{-3x},$$

waarin C een willekeurige constante is.
▷ De differentiaalvergelijking $y' = -x/y$ heeft als oplossingsfamilie

$$h(x) = \sqrt{C - x^2}.$$

Deze familie is niet de *algemene* oplossing.

---

12 Toon aan, dat de volgende paren differentiaalvergelijkingen de volgende oplossingsfamilies hebben:

a $\frac{dy}{dt} = 2$, $f(t) = 2t + C$, C willekeurig.

b $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$, $g(x) = \sqrt{2x + C}$, C willekeurig.

c $\frac{dy}{dt} = -4y$, $h(x) = Ce^{-4t}$, C willekeurig.

13 Bepaal een oplossingsfamilie van:

a $\frac{dy}{dt} = t + 1$

b $\frac{dy}{dx} = 0$

c $\frac{dy}{dt} = 3y - 3$ (Aanwijzing: stel $u = y - 1$.)

14 a Beredeneer aan de hand van het richtingsveld, dat de oplossingsfamilie $f(x) = C$ *alle* oplossingen omvat van de differentiaalvergelijking $y' = 0$.

b Voor een oplossing $g(x)$ van de differentiaalvergelijking $y' = -2y$, geldt $g(0) = 0$. Beredeneer aan de hand van het richtingsveld, dat $g(x) = 0$ voor elke waarde van x.

c Een oplossingsfamilie van de differentiaalvergelijking $y' = -2y$ wordt gegeven door $h(x) = Ce^{-2x}$. Beredeneer aan de hand van het richtingsveld, dat dit ook de algemene oplossing is van de differentiaalvergelijking. (Aanwijzing: laat zien dat door elk punt van het x-y vlak zo'n kromme gaat).

15 a Laat zien: als de lijnen $y = m_1x + q_1$ en $y = m_2x + q_2$ elkaar snijden geldt $m_1 \neq m_2$.

b Laat zien, dat twee verschillende oplossingen van een differentiaalvergelijking elkaar *nooit* kunnen snijden. (Aanwijzing: wat zou de richtingscoefficiënt van hun raaklijnen zijn in het snijpunt?)

c Beredeneer met het resultaat van onderdeel b), dat de leden van een ooplossingsfamilie van een differentiaalvergelijking elkaar nooit kunnen snijden.

De beginwaarde ....

16 Plaatje grafiek van exponentieel verval/groei voor verschillende beginwaarden. Verscheiden mensen hebben bij de BCO bank te Rommeldam een spaarrekening tegen 3.8% per jaar. De groei van het kapitaal K wordt beschreven door de differentiaalvergelijking

$$\frac{dK}{dt} = 0.0373K,$$

wat andere geleerden daarover ook mogen zeggen. Op 1 jan 1990 hadden

a Heer O. B. Bommel $f2.000.000$, markies de Cantecleer $f10.000$ en ambtenaar 1e klasse A.B.C Dorknoper $187, 63$.

b Wat is de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking?

c Maak een tabel van de kapitaalgroei van deze drie spaarders gedurende de laatste decade van dit millennium.

Leggen we de oplossing van een differentiaalvergelijking in één punt vast, dan is deze oplossing daarmee volledig bepaald. De x (of t) waarde, waarin we de oplossing vastleggen heet het *beginpunt*, de waarde van de oplossing in het beginpunt de *beginwaarde*.
De beginwaarde wordt soms ook (minder juist) beginvoorwaarde of (nog minder juist) randvoorwaarde genoemd.

---

17 Op dezelfde bank te R. had O. Dickerdack op 1 jan 2000 f 7260,12. Wat had hij op 1 jan 1990?

a

18 De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking $y' = -\frac{x}{y}$ is de familie van alle cirkels met middelpunt (0,0).

a Toon dit aan.

b Geef een beginwaarde voor de bovenhelft van de cirkel met straal 1.

c Geef een beginwaarde voor de onderhelft van de cirkel met straal 5.

19 Een radioactief isotoop vervalt volgens de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = -0.004y.$$

t in jaren.

a Op 1 jan 1990 mat men een hoeveelheid van 1 μg van het isotoop in een archeologisch object. Hoeveel μg was er aanwezig in dat object op 1 jan 100 AD?

b Wat is de halveringstijd van het isotoop? Leg uit dat de halveringstijd onafhankelijk is van de beginwaarde.

20 Een bacterie-kolonie groeit volgens het exponentiële groeimodel

$$\frac{dN}{dt} = aN.$$

a Op woensdag om 12 uur 's middags is N=5500.

b Op donderdag om 12 uur 's middags is N=6500.

c Bereken a.

d Bereken N op de dinsdag daaraan voorafgaand om 12 uur 's middags.

Kern 3 Algemene oplossing van andere groeimodellen

Geremde groei ....

21 Foto parachutespringer. De verticale snelheid v (in m/sec) van een parachutespringer met geopende parachute wordt gegeven door de differentiaalvergelijking

$$\frac{dv}{dt} = 5 - v$$

a Ga na, dat als $v = 5$ de snelheid van de parachutespringer niet meer verandert. Dit noemt men zijn "stationaire snelheid".

b Bekijk het verschil van de werkelijke snelheid en de stationaire snelheid: $u = v - 5$. Differentieer deze betrekking aan beide zijden van het gelijkteken en toon daarmee aan, dat u voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\frac{du}{dt} = -u.$$

c Geef de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor u.

d Geef met behulp van b) en c) de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor v.

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking voor geremde groei

$$\frac{dy}{dt} = 1 - y,$$

wordt gegeven door

$$y = 1 + Ce^{-t},$$

waarin C een willekeurige constante is.

Voorbeeld

Bereken de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = 7 - y$$

▷ We "vermoeden", dat de algemene oplossing is $f(x) = 7 + Ce^{-x}$.
▷ We differentiëren deze uitdrukking: $f'(x) = -Ce^{-x}$.
▷ Door substitutie vinden we, dat inderdaad geldt $f'(x) = 7 - f(x)$, dus f is een familie van oplossingen van de DV.
▷ Door ieder punt van het x-y–vlak gaat precies één lid van de familie.

---

22 Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\frac{dv}{dt} = 3 - v$$

a Bepaal de oplossing die door (0,0) gaat.

b Bepaal de oplossing die door (-10,5) gaat.

23 a Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\frac{du}{dt} = k - u,$$

met k een willekeurige constante.

b Geef een argument waaruit blijkt, dat je inderdaad *alle* oplossingen hebt.

24 Plaatje richingsvelden. Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\frac{dw}{dt} = 2(k - w)$$

a Vergelijk deze differentiaalvergelijking met de differentiaalvergelijking uit som 23. Bekijk de richtingsvelden van beide differentiaalvergelijkingen en experimenteer met het vermenigvuldigen van de t-as. Voor welke vermenigvuldigingsfactor zijn de richtingsvelden hetzelfde?

b Geef een formule voor de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

c Verifieer je oplossing door substitutie.

25 (Foto van fles Oude Bokma, met etiket onzichtbaar, want naar andere kant toe.) Een fles melk wordt uit de koelkast gehaald en heeft op $t = 0$ een temperatuur van 6°. Omdat het in de keuken 19° is warmt de fles op volgens de differentiaalvergelijking:

$$\frac{dT}{dt} = a(19 - T),$$

t in minuten.

a Geef een formule voor de temperatuur T.

b Na een kwartier is de temperatuur van de fles 12°. Bepaal a.

De algemene oplossing voor logistische groei ....

26 (plaatje logistische kromme). Bekijk de functie

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

a Bereken de afgeleide van f.

b Laat zien, dat f een oplossing is van de logistische DV

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y).$$

c Laat zien, dat het richtingsveld onveranderd blijft bij verschuiving langs de t-as. Leid hieruit af, dat $f(t+1)$ óók een oplossing is. Wat is de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking?

De algemene oplossing van de logistische vergelijking met draagcapaciteit $M > 0$:

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - \frac{y}{M})$$

wordt gegeven door

$$y = \frac{M}{1 + C\mathrm{e}^{-t}}$$

waarin C een willekeurig constante is.

Voorbeeld

Een natuurreservaat kan 100 herten herbergen. Er wordt een populatie van 20 herten uitgezet. Bereken de bevolkingsgroei als functie van de tijd, als de bevolkingsgroei volgens bovenstaande differentiaalvergelijking kan worden gemodelleerd.
▷ Hier geldt: $M = 100$ en wegens $f(0) = 20$ krijgen we

$$20 = \frac{100}{1 + C}$$

ofwel C=4.
▷ Het antwoord is dus $f(t) = \frac{100}{1+4\mathrm{e}^{-t}}$.

---

27 Een populatie zeehonden groeit volgens bovenstaand model. Plaatje! Snoezige zeehonden!

a Op 1 aug 1990 telt men 100 zeehonden. Druk C uit in M.

b Op 1 aug 1991 telt men 200 zeehonden. Druk C uit in M.

c Bereken M en C

28 We bewijzen de formule uit het kleurvlak.

a Laat met behulp van substitutie zien, dat

$$u = \frac{1}{1 + C\mathrm{e}^{-t}}$$

een oplossings familie is van

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u).$$

b Ga na, dat door ieder punt in het t-u vlak een lid van de familie gaat. Met welke oplossingen corresponderen positieve, resp. negatieve waarden van C?

c Stel $u = \frac{y}{M}$ en substitueer dit in de differentiaalvergelijking. Welke differentiatieregel moet je toepassen?

29 Als de herten gemiddeld tweemaal zoveel jongen per jaar krijgen gaat de groei natuurlijk tweemaal zo hard. Voor deze herten geldt dus:

$$\frac{dw}{dt} = 2w(1 - \frac{w}{M})$$

a Vergelijk het richtingsveld van deze differentiaalvergelijking met dat van de differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - \frac{y}{M})$$

b Laat zien, dat beide richtingsvelden gelijk zijn wanneer de tijdschaal t voor de differentiaalvergelijking van w met 2 vermenigvuldigd wordt, m.a.w als w wordt gemeten in een tijd t' waarvoor geldt $t' = 2t$.

c Geef de algemene oplossing voor w in t'.

d Geef de algemene oplossing voor w in t.

30 De algemene logistische vergelijking wordt gegeven door

$$\frac{dy}{dt} = cy(1 - \frac{y}{M}),$$

met c de voortplantingscoëfficiënt en M de draagcapaciteit.

a Geef de algemene oplossing op dezelfde manier als in de vorige som.

b Verifieer het resultaat door substitutie.