Opmerking 1 *In deze kern komen uiteindelijk twee toepassingen. Ik heb er hier vier bijeengebracht, nog niet helemaal uitgewerkt op somniveau, die ik zal gebruiken voor deze kern, de ICT pagina's en de doorwerking. De bedoeling is om vast te stellen of dit bruikbaar materiaal is en of het niveau van de afleidingen een beetje OK is. De vragen die gesteld zullen worden zijn allemaal van het type teken het richtingsveld, bereken de numerieke oplossing, geef de algemene oplossing, asymptoten, evenwicht en zo. Deze toepassingen worden echt zo gebruikt en zijn in mijn ogen veel aardiger dan de betrekkelijk gekunstelde toepassingen van het profi-materiaal.*

Kern 4 Toepassingen

Ontlading van een condensator over een weerstand. .....

Een condensator bevat een electrische lading Q. Op tijdstip $t = 0$ wordt een schakelaar gesloten, waardoor de condensator zich zal ontladen. Tekening van

circuit

31 De spanning over de weerstand V is evenredig met de lading die de condensator bevat.

a Druk V uit in Q, noem de evenredigheidsfactor a.

b De *capaciteit* C van de condensator is gedefinieerd als

$$C = \frac{1}{a}.$$

Druk Q uit in C en V.

c Door het sluiten van het circuit gaat er een stroom i lopen door de weerstand R. Wat is het verband tussen deze stroom en de spanning V?

d Deze stroom i is "bewegende lading". Door deze stroom neemt (dus) de lading op de condensator af

$$-\frac{dQ}{dt} = i.$$

Met behulp van b) en c) kun je nu afleiden:

$$\frac{dQ}{dt} = -bQ.$$

Druk b uit in R en C.

De achterwielvergelijking. .....

Opmerking 2 *De achterwielvergelijking is een variant op de baas-hond vergelijking, die ikzelf niet zo leuk vind. Een echte hond loopt niet achter zijn baas aan, maar trekt zijn baas voort. O, nou zie ik het je moet er natuurlijk de hond - baasvergelijking van maken. Maar terzake. De achterwielvergelijking houdt geen rekening met de dynamica, want alle traagheidskrachten worden verwaarloosd en aangenomen wordt, dat er geen zijdelingse wrijving optreedt, wat natuurlijk niet waar is, als je daadwerkelijk op je fiets rijdt. Daarom is de aanname, dat je de fiets aan de hand meeneemt vrij essentieel.*

32 Iemand loopt met zijn fiets aan de hand met constante snelheid $v = 1m/sec$ lang de lijn $y = 0$. Op het moment, dat hij begint te lopen, maakt zijn fiets een hoek met de $x - as$: het voorwiel bevindt zich op de x-as, maar de y-coördinaat van de achteras is 50 cm. De afstand van stuurpen tot achteras is 1 m. (Zie tekening) Bovenaanzicht fiets

a Als het voorwiel beweegt, beweegt het achterwiel zich langs de verbindingslijn tussen achteras en balhoofd. Deze lijn maakt een hoek a met de x-as. (Zie tekening) Wat is de baansnelheid van het achterwiel? Laat zien, dat voor de snelheid in de y-richting van het achterwiel v_y geldt

$$v_y = -\sin a$$

en voor de snelheid in de x-richting v_x:

$$v_x = ..$$

b Druk $\sin a$ uit in de y-coördinaat van het achterwiel y_a.

c Druk v_y uit in $\frac{dy_a}{dt}$.

d Laat zien, dat geldt

$$\frac{dy_a}{dt} = -y_a.$$

e Laat zien, dat geldt

$$\frac{dx_a}{dt} = x_v - x_a.$$

Hierin zijn x_v en x_a de coördinaten van het voorwiel resp het achterwiel.

De rioolpijpvergelijking .....

Een reservoir loopt leeg via een pijp. (Zie tekening.) Op $t = 0$ wordt de pijp geopend en we zijn geïnteresseerd in het *debiet* Q. Dat is het aantal kubieke meters water, dat per tijdseenheid de pijp instroomt. Het debiet heeft de dimensie van een snelheid $\times$ oppervlakte.

33 a Volgens Newtons tweede wet zijn de op het water werkende krachten evenredig met de verandering van het debiet per tijdseenheid. Wat is de dimensie van de evenredigheidsfactor? Deze wordt in het vervolg gemakshalve 1 gesteld. (Kan ons het schelen?) De op het water werkende krachten bestaan uit een constante kracht f, veroorzaakt door de zwaartekracht en een tegenwerkende kracht k veroorzaakt door inwendige wrijving van de vloeistof en wrijving van vloeistof en pijp. Laat zien, dat f evenredig is met $\sin a$, met a de hellingshoek van de pijp. Waar hangt f nog meer van af? (Antw: doorsnede pijp, versnelling zwaartekracht g en dichtheid van de vloeistof.)

b Volgens een experimenteel model is $k = 0,1Q^2$. Leid een differentiaalvergelijking af voor het debiet Q. Neem $f = 0,1$.

c Van deze differentiaalvergelijking kennen we de algemene oplossing niet. Substitueer eerst $Q = P - 1$ in de differentiaalvergelijking en bepaal de algemene oplossing P van de dan resulterende vergelijking. Wat is de algemene oplossing voor Q?

d Neem $f = 0,4$. Welke substitutie moet je nu toepassen?

Verspreiding van een epidemie .....

Een epidemie verspreidt zich onder een populatie. Deze bestaat uit twee groepen: *besmette* en *onbesmette* individuen. We vragen ons af hoe de epidemie zich verspreidt als functie van de tijd.

34 a Laat N_b het aantal *besmette* personen zijn uit de populatie. Besmetting kan alleen plaats vinden als een besmet persoon een niet besmet persoon ontmoet. Laat N het totale aantal zijn van de populatie, dan is het aantal onbesmetten $N_o = N - N_b$. Leg uit, dat de toename in het aantal besmettingen per tijdseenheid evenredig zal zijn met het aantal ontmoetingen O tussen besmetten en niet besmetten. Druk dit uit in een formule waarin $\frac{dN_b}{dt}$ en O voorkomen. Noem een paar factoren, die van invloed zijn op de evenredigheidsfactor.

b Als model veronderstellen we, dat het aantal ontmoetingen tussen twee groeperingen evenredig is met het product van het aantal individuen in elk van beide groeperingen. Druk O uit in N_o en N_b in overeenstemming met deze veronderstelling. Druk O ook uit in N en N_b. Denk je dat deze modelaanname realistisch is? Welke factoren zullen van invloed zijn op de evenredigheidsfactor?

c Laat zien, dat het aantal besmetten onder aanname b) zich laat beschrijven door de logistische vergelijking. Geef aan wat c en M is in dit geval.