Winner takes all

Simuleren en denken

Jos van Kan *

18 januari 2000

1 Inleiding

In deze practische opdracht zullen wij een modelstudie verrichten met behulp van simulatie. Simulatie is een vaak gebruikt (misbruikt) middel om complexe processen te bestuderen. Deze worden vaak eerst vereenvoudigd tot een model, dat (hopelijk) nog steeds de wezenlijke kenmerken bevat van de complexe werkelijkheid.
Bij het simuleren komt men vaak niet verder dan wat data genereren en mooie plaatjes tekenen, maar dat is natuurlijk de kunst niet. De simulatie is ook bedoeld om processen beter te *begrijpen*.
In een modelstudie met simulatie kun je de volgende fasen onderscheiden:

Modelvorming Van het proces wordt een model gemaakt. Zo'n model bevat *modelparameters* en *modelvariabelen*. De modelparameters stellen uitwendige omstandigheden voor. Deze worden als gegeven beschouwd, maar kunnen gevarieerd worden. Beleidsmakers spreken dan over verschillende *scenario's*. Modelvariabelen zijn de grootheden waarvan we het gedrag willen bekijken.

Simulatie Van een proces worden een aantal simulaties gedaan voor verscheidene waarden van de parameters. Op grond hiervan kun je *voor de gekozen waarden van de parameters* soms al een uitspraak doen over het gedrag van de modelvariabelen.

Analyse De resultaten van verschillende simulaties worden met elkaar vergeleken en geanalyseerd met algebraïsche, numerieke en grafische hulpmiddelen. Vaak geeft de analyse aanleiding tot een veronderstelling hoe het model zich gedraagt als je een modelparameter laat variëren

Scholium De juistheid van zo'n veronderstelling moet je ook kunnen aantonen. Dit is vaak het lastigste onderdeel, maar juist datgene wat het geheel tot een *wiskundig* onderzoek maakt. Eventueel vereenvoudigt men het model om formulematig iets aan te tonen.

Conclusies Tenslotte gaan we na in hoeverre we antwoord hebben gekregen op de over het proces gestelde vragen.

*TU Delft, faculteit Informatietechnologie en Systemen.

2 Two person freeze–out.

Het proces, dat we gaan bekijken is een tweepersoons spel om geld. Dit spel wordt zolang herhaald, totdat een van de twee spelers blut is. Per spel en per speler wordt steeds eenzelfde bedrag ingezet. De gegevens (modelparameters) die bij dit proces kunnen variëren zijn de *behendigheid* van de spelers en de grootte van hun *beginkapitaal*. Wij zijn geïnteresseerd in de volgende vragen.

- Als de spelers *even goed* zijn, hoe beïnvloeden hun beginkapitalen dan hun kans op een succesvolle afloop? Hoe hangt het aantal spelletjes dat gespeeld moet worden voordat een van de twee blut is af van de beginkapitalen?
- En hoe zit het als een van de twee (beduidend) beter is?

2.1 Modelvorming.

Voor dit proces zou de fase *modelvorming* er als volgt uit kunnen zien. We doen alsof het spel dat gespeeld wordt een *kansspel* is en formuleren daarmee een *stochastisch model*. Wij (speler W) hebben een kans p om elk afzonderlijk spel te winnen, en Zij (speler Z) dus een kans $1 - p$. W heeft een beginkapitaal in gehele guldens van G_w en Z een beginkapitaal G_z. Ieder spel gaat om één gulden: wint W, dan betaalt Z één gulden aan W, en wint Z, dan betaalt W een gulden aan Z. Het totale aantal guldens dat in het spel is, is dus in iedere fase constant: $G_{tot} = G_w + G_z$.

> ... and the total number of tears in the universe is a constant.
> (Samuel Beckett, „Waiting for Godot.")

2.2 De fasen simulatie en analyse

Voor het geval $p = \frac{1}{2}$ doen we een aantal simulaties voor verscheidene waarden van G_{tot}. Voor een vaste waarde van G_{tot} bekijken we *alle* beginposities.
De resultaten (winst als functie van beginkapitaal en sessielengtie als functie van beginkapitaal) zetten we uit in een grafiek en we proberen een functioneel verband hieruit te halen
Hetzelfde doen we voor het geval $p \neq \frac{1}{2}$.

2.3 Scholium fase

Wij proberen de door ons uit de grafiek „geraden" verbanden ook met wiskundige middelen af te leiden. In dit speciale geval kan dat (toevallig), maar het zal ook blijken, dat het zeker voor het geval $p \neq \frac{1}{2}$ niet zo eenvoudig is.
We maken voor de simulatie gebruik van het programma WinStats. De commando's worden beschreven in de vorm: [com1 ▶] [com2 ▶] *...* [com#]*. Dat betekent klik menu-item com1, dan com2 in het pop-up menu enzovoorts tot com#. Start WinStats.*

3 Beide spelers even goed: $p = \frac{1}{2}$

3.1 Simulatie met $G_{tot} = 12$

[Window ▶] [Simulate ▶] [Gambler's Ruin] geeft een window met een regel met W's en L's (wins & losses). Dat is het resultaat van één enkele simulatie, maar dat is natuurlijk voor kinderen. Allereerst zetten we het aantal op 10000. [Do ▶] [Number...]

Verder zetten we het beginkapitaal voor beide spelers op 6 gulden. $\boxed{\text{Params}}$ Als alles goed is staat de *probability of win* al op 0.5, anders moet je dat ook nog doen.

Nu zijn we klaar om de simulatie te starten. $\boxed{\text{Do} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Many}}$ of F12. In de titelbalk zie je hoeveel simulaties er al gedaan zijn. Als de simulatie klaar is kun je het resultaat bekijken met $\boxed{\text{Do} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Data} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Inspect}}$ Er verschijnt nu een venster met een rij uitkomsten, het *games data* venster.

- *leng* is het gemiddelde aantal spelletjes in een simulatierun. In één simulatierun wordt net zolang gespeeld totdat een van de twee partijen geen geld meer over heeft.
- *succ* is het aantal runs, dat onze held won, gedeeld door het totale aantal simulatieruns. De nederlandse term hiervoor is *fractie van successen.*
- *succ leng* is het gemiddelde aantal spelletjes in een door onze held gewonnen simulatierun.
- *fail* is het aantal runs dat onze held verloor, gedeeld door het totale aantal simulatieruns. De nederlandse term hiervoor is *fractie van mislukkingen*.
- *fail leng* de gemiddelde lengte van een door onze held verloren simulatierun.
- *stake* (inzet) is het beginkapitaal van onze held.
- *total* (zou eigenlijk *opponent's stake* moeten heten) is het beginkapitaal van de tegenstander.
- *succ prob* De kans om één spelletje te winnen.
- *trials* is het aantal simulatieruns.

Opdrachten

1. Welke uitkomsten van de simulatie zijn het belangrijkste voor de vragen die wij over het proces willen beantwoorden?
2. Formuleer op grond van deze uitkomsten voorlopige antwoorden op deze twee vragen.
3. Gelden deze antwoorden ook voor andere instellingen van de modelparameters?

Wij herhalen dit voor $G_w = 7$ en $G_z = 5$. Dit geeft een nieuwe regel in het *games data* venster.
Zelfde voor $G_w = 8$ en $G_z = 4$, $G_w = 9$ en $G_z = 3$ ... enzovoort, totdat we alle gevallen met totaal kapitaal 12 gehad hebben. Er staan nu 6 regels in het *games data* window. Als er per ongeluk te veel, of verkeerde regels in dit venster terecht gekomen zijn is dat niet erg. Deze kunnen we later gemakkelijk verwijderen. (Zie sectie 3.2).
We kunnen natuurlijk voor al deze gevallen afzonderlijk voorlopige antwoorden op de vragen van bladzijde 2 formuleren, maar dat is niet zo interessant. Liever proberen wij voor de instelling $p = \frac{1}{2}$ en $G_{tot} = 12$ een overzicht te krijgen hoe de *systeem variabelen* (kans op de overwinning, respectievelijk gemiddeld benodigd aan tal spelletjes) variëren als functie van de *modelparameter* G_w.

3.2 Analyse en hypothese voor $G_{tot} = 12$

Het *games data* venster is door zijn breedte niet erg overzichtelijk. Om de simulatiegegevens beter te kunnen bekijken en bewerken brengen we ze over naar een ander deel van WinStats. Hiertoe worden de gegevens eerst opgeborgen in een .fma file $\boxed{\text{Do} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Data} \blacktriangleright}\boxed{\text{Save as Matrix}}$. Berg deze gegevens op als `geval1.fma`. Open het analyse deel voor twee variabelen van WinStats en laad `geval1.fma` ($\boxed{\text{Window} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{2-var}}$, daarna $\boxed{\text{File} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Open}}$). Verwijder eventueel kolommen die voor onze analyse niet van belang zijn. $\boxed{\text{Edit} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Remove} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Columns...}}$ en in het dialoogvenstertje het nummer van de eerste en laatste van *opeenvolgende* kolommen die moeten worden verwijderd. Hoef je maar één kolom te verwijderen, dan zijn deze nummers dus gelijk. (Op gelijke wijze verwijder je overtollige rijen: $\boxed{\text{Edit} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Remove} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Rows...}}$).

Opdrachten

1. We hebben bij de simulaties alleen maar gevallen bekeken waarvoor $G_w \geq G_z$. Leg uit waarom je op grond van deze waarnemingen ook een uitspraak kunt doen voor de andere gevallen.

2. Bekijk de uitkomsten van *succ* en de bijbehorende waarden van *stake* en *total*. Heb je een vermoeden over een verband tussen de kans u op uiteindelijk succes voor speler W en zijn beginkapitaal G_w? Zo ja, geef je vermoeden in de vorm van een formule waarin u wordt uitgedrukt in G_w en G_{tot}.

3. Kun je ook een verband vinden voor *leng*, G_w en G_z?

Als je uit de tabel de gevraagde verbanden niet hebt kunnen vinden, lukt dat waarschijnlijk beter met behulp van grafieken. Heb je wel formules gevonden, dan kun je deze controleren aan de hand van de grafiek.
Om *succ* te plotten tegen *stake* $\boxed{\text{Scatter} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Plot}}$ en in de dialoogbox in het vakje *horiz* het kolomnummer van *stake* invullen. In het eerste *vert* het kolomnummer van *succ* invullen.
Maak het grafiekvenster zo groot mogelijk. Kies het zichtvenster:
$\boxed{\text{View} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Set Corners...}}$
en nu in het dialoogvenstertje als uiterste waarden voor de horizontale as 0 en 12 invullen en voor de uiterste waarden van de verticale as 0 en 1.

Opdrachten

4. Bedenk hoe de figuur voor waarden van *stake* tussen 0 en 6 zou kunnen worden voortgezet. Welk type verband wordt door de stippen gesuggereerd? (lineair, kwadratisch, exponentieel, logarithmisch, sinusoïde)

5. Welke formule hoort daarbij? (Aanwijzing: Wat is *succ* voor een *stake*-waarde van 0? Wat is *succ* voor een *stake*-waarde van 12?) Kijk of je gevonden formule klopt met de data. ($\boxed{\text{Graph} \blacktriangleright}$ $\boxed{\text{Other}}$ en in het vakje $Y =$ de formule voor x invullen.

Plot *leng* tegen *stake* en pas de verticale schaal van het assenstelsel aan, zodat de hele figuur in beeld komt.

Opdrachten

6. Bedenk hoe de figuur voor waarden van *stake* tussen 0 en 6 zou kunnen worden voortgezet. Van welk type is het verband dat door de stippen wordt gesuggereerd? (lineair, kwadratisch, derde- of hogere-graads, exponentieel, logaritmisch, sinusoïdaal)
7. Wat is de symmetrie–as? Wat zijn de nulpunten? Wat is de bijbehorende formule? Kijk ook hier of je gevonden formule klopt met de data.

3.3 Simulatie met $G_{tot} = 18$

Maak eerst de vensters in het simulatie-deel van WinStats schoon: Do ▶ Data ▶ Reset
Herhaal de simulaties van sectie 3.1 voor $G_{tot} = 18$. Dit geeft dus 9 regels in het *games data* venster. Berg deze gegevens op in `geval2.fma`.

3.4 Analyse en hypothese voor $G_{tot} = 18$

Analyseer de nieuwe simulatiegegevens op de manier van sectie 3.2 en formuleer weer hypothese over u en L. Zijn de formules die je nu hebt bedacht anders dan in sectie 3.2? Probeer de formules zó te schrijven, dat ze niet afhankelijk zijn van de *specifieke* waarde van G_{tot}, maar voor elke waarde van G_{tot} bruikbaar zijn. (Aanwijzing: de modelparameter G_{tot} zal dus moeten voorkomen in een dergelijke formule.)

3.5 Scholium

In dit gedeelte zullen we proberen de gevonden zaken wiskundig te onderbouwen. Allereerst proberen we aan te tonen, dat bij $p = \frac{1}{2}$ het verband tussen u en G_w lineair is.
In onze dataset `geval1.fma` hebben we een compleet overzicht van de kans op succes bij *alle* mogelijke verdelingen van het beginkapitaal. Maar je zou ook kunnen zeggen, dat we gedurende het spel eigenlijk steeds opnieuw beginnen, alleen na een herverdeling van het kapitaal! Bekijk eens de situatie dat wij f 8 hebben en de tegenstander (dus) f 4. Het resultaat van eenmaal spelen kan resulteren in twee mogelijke situaties:

1. We winnen. Wij hebben dan f 9, de tegenstander f3.
2. We verliezen. Wij hebben dan f 7, de tegenstander f5.

Elk van deze gebeurtenissen kunnen plaats vinden met kans $p = \frac{1}{2}$. Hoe zit het nu met de kans op succes als we f 8 hebben? Laten we de kans op succes met f 8 u_8 noemen, of in het algemeen, de kans op succes met n gulden u_n.

Opdrachten

1. Leg met behulp van bovenstaande redenering uit, dat moet gelden

$$u_8 = \frac{1}{2}u_7 + \frac{1}{2}u_9$$

of in het algemeen

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n+1}$$

2. Verifieer of voor de gesimuleerde waarden deze betrekking ongeveer klopt.
3. Vervang in de laatste betrekking u_n door $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_n$ en leg uit, dat geldt:

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$$

   ofwel

$$\Delta u_n = \Delta u_{n-1}$$

4. Het resultaat van opdracht 3 betekent, dat van de rij $u_0, u_1, \ldots, u_n$ de *verschilrij* een *constante* rij is. Van welk type is (dus) de rij $u_0, u_1, \ldots, u_n$ zelf? Leg aan de hand van de formule die je voor de n-e term van zo'n rij kent uit, dat u_n een eerstegraads functie van n is.
5. Leg uit, dat hiermee is aangetoond, dat voor $p = \frac{1}{2}$ en $G_{tot} = 12$ het verband tussen u en G_w lineair is.
6. Ga na, dat dezelfde redenering opgaat voor *iedere* waarde van G_{tot}.

Voor de gemiddelde sessielengte L is de redenering iets ingewikkelder, maar gaat in wezen op dezelfde manier.

Opdrachten

7. Laat de gemiddelde spellengte bij het bezit van n gulden L_n zijn. Leg met behulp van bovenstaande redenering uit dat moet gelden

$$L_8 = \frac{1}{2}L_7 + \frac{1}{2}L_9 + 1$$

   of algemeen

$$L_n = \frac{1}{2}L_{n-1} + \frac{1}{2}L_{n+1} + 1$$

8. Verifieer of voor de gesimuleerde waarden deze betrekking ongeveer klopt.
9. Leid uit het resultaat van opdracht 7 een betrekking af tussen twee opeenvolgende termen ΔL_n en ΔL_{n-1} van de verschilrij van $L_0, L_1, \ldots$
10. Leg uit, dat uit dit resultaat volgt dat de *verschilrij van de verschilrij* een *constante* rij is. Wat weet je in zo'n geval van de n-e term van $L_0, L_1, \ldots$ zelf?
11. Wat voor soort functie is L_n van n? (lineair, kwadratisch, derde of hogeregraads, exponentieel, logaritmisch, sinusoïdaal) Het is in zo'n onderzoek niet ongebruikelijk, dat je in de loop van de tijd op dezelfde vragen verschillende antwoorden geeft. Men spreekt dan van *voortschrijdend inzicht.*

3.6 Conclusies

Nu we de hypothesen over het model ook met algebraïsche middelen hebben weten te verifiëren kunnen we met een gerust hart antwoord geven op de vragen, die we aan het begin over ons proces hebben gesteld. Wel moeten we ons er rekenschap van geven, dat wij een *model* hebben bekeken. Onze antwoorden zullen dus altijd een *benadering* zijn. De keten is zo sterk als zijn zwakste schakel: onze antwoorden zijn nooit beter dan ons model.
Onze conclusies luiden als volgt. Onder de gegeven spelregels geldt voor *even goede* spelers:

- De kans op een goede afloop voor een speler is *op elk moment* gelijk aan de *fractie* die zijn kapitaal uitmaakt van het totale kapitaal.

- Het aantal spellen dat gemiddeld nog gespeeld moet worden is *op elk moment* gelijk aan het product van de kapitalen van beide spelers. Een klein puntje: deze kapitalen moeten worden uitgedrukt in de inzet per spel en per speler.

Opdrachten

1. Als we met *f* 30,= beginnen en onze tegenstander met *f* 10,=, wat is dan onze kans om te winnen? Wat is de gemiddelde sessielengte L?

2. We spelen twaalf sessies, waarbij wij steeds met *f* 30,= beginnen en onze tegenstander steeds met *f* 10,=. Hoeveel denk je dat wij na die twaalf sessies gewonnen hebben?

4 Een speler beduidend beter, $p > \frac{1}{2}$

We herhalen de eerste simulatieset voor het geval dat een der twee spelers beduidend beter speelt dan de ander. Als voorbeeld nemen we $p = 0.55$.
We simuleren weer met $G_{tot} = 12$. Deze keer laten we G_w lopen van 1 tot 11 en er moeten nu 11 regels in het *games data* venster komen. Ook deze gegevens opbergen (`geval3.fma`).
Laad `geval3.fma` binnen (Window ▶ 2-var...) en plot *succ* resp *leng* tegen *stake*. Geldt het voor $p = 0.5$ gevonden functie verband voor *succ* ook hier? En dat van *leng*?
Het is in dit geval niet zo gemakkelijk om uit de grafische gegevens een functieverband te „raden”. Maar de gevolgde methodiek uit het scholium van de vorige sectie kan ons wel helpen.

Opdrachten

1. Probeer met eenzelfde soort redenering als in de vorige paragraaf u_n uit te drukken in u_{n+1} en u_{n-1}. Kijk of de waarden van de simulatie een beetje kloppen met de gevonden betrekking.

2. Vervang in deze uitdrukking nu u_n door $0.55u_n + 0.45u_n$ en laat zien, dat geldt:
$$0.55\Delta u_n = 0.45\Delta u_{n-1}$$
ofwel
$$\Delta u_n = \frac{9}{11}\Delta u_{n-1}$$
Wat voor soort rij is deze verschilrij?

3. Ga na, dat de uitdrukking
$$u_n = a + br^n$$
voor een geschikte keuze van r eenzelfde verschilrij oplevert. Hoe kies je r?

4. Bereken ook de constanten a en b in deze uitdrukking. (Aanwijzing: $u_0 = 0$ en $u_{12} = 1$.)

5. Controleer de gevonden uitdrukking door deze te plotten in de figuur, waarin *succ* is uitgezet tegen *stake*.

6. Druk L_n uit in L_{n-1} en L_{n+1}. Verifieer het gevonden verband aan de simulatiedata. Een uitdrukking vinden voor L_n hoeft niet.
7. (Voor een bonuspunt) Druk *voor algemene waarden van* p u_n uit in u_{n-1} en u_{n+1} en bereken de formule voor u_n. Hier komt p dus als *modelparameter* nog in voor! Verifieer je resultaat door simulaties met verscheidene waarden van p.

5 Toepassing

(Dit is voor het tweede bonuspunt.) Mr. Thorvald heeft een weddenschap aangegaan om een freeze-out te spelen tegen Mr. Gates. Mr. Gates is weliswaar niet zo'n goede speler (T heeft p=0.55, G p=0.45), maar is dermate puissant rijk, dat zijn kapitaal gemakshalve op oneindig gesteld kan worden. Hoe kun je dat simuleren? Hoeveel geld moet T meenemen om deze confrontatie met 90% zekerheid te winnen (of liever gezegd, niet te verliezen...)?
Succes!