Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Uitwerkingen toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
woensdag 24 maart 2004, 9:00-10:30

1. (a) Bepaal eerst de afgeleide van $p(x)$:

$$p'(x) = \frac{1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{1}{x_1 - x_0} f(x_1).$$

Invullen van de gegevens geeft dan: $\frac{f(-h)-f(-2h)}{h}$

(b) De formule is $\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$ en de fout is $O(h)$. Om dit af te leiden wordt er gebruik gemaakt van

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1), \\ f(x-2h) &= f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - \frac{8h^3}{6} f'''(\xi_2), \end{aligned} \tag{1}$$

Bepaal dan α_0, α_1 en α_2 zodanig dat

$$\alpha_0 f(x) + \alpha_1 f(x-h) + \alpha_2 f(x-h) = f''(x) + O(h).$$

(c) De afrondfout is $\frac{4\varepsilon}{h^2}$.

2. (a) De versterkingsfactor volgt uit de definitie: schrijf $w_{j+1} = Q(h\lambda)w_j$ voor de testvergelijking $y' = \lambda y$. Neem $f(t,y) = \lambda y$ en substitueer dit in de definitie van RK$_3$ dan volgt:

$$\begin{aligned} k_1 &= h\lambda w_j \\ k_2 &= (h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2})w_j \\ k_3 &= (h\lambda + (h\lambda)^2 + \frac{(h\lambda)^3}{2})w_j \\ Q(h\lambda) &= 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} \ . \end{aligned}$$

(b) De definitie van de afbreekfout is:

$$\frac{y_{j+1} - \hat{w}_{j+1}}{h},$$

waarbij $\hat{w}_{j+1}$ gelijk is aan één stap met de RK$_3$ methode toegepast op y_j. Dit geeft

$$\frac{y_{j+1} - \hat{w}_{j+1}}{h} = \frac{e^{h\lambda}y_j - Q(h\lambda)y_j}{h} = \frac{\frac{(h\lambda)^4}{4!} + ...}{h} = O(h^3).$$

(c) Door de keuze $x_1 = y$ en $x_2 = y'$ volgt:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = t - 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

De eigenwaarden van de matrix zijn: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -3$. Het stelsel is stabiel omdat de eigenwaarden kleiner dan nul zijn.

(d) Invullen van $h = \frac{1}{3}$ en $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -3$ geeft:

$$Q(h\lambda_1) = 0.7160 \text{ en } Q(h\lambda_2) = \frac{1}{3}$$

Beiden zijn kleiner dan 1, dus is de methode stabiel voor $h = \frac{1}{3}$.