Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen

Uitwerkingen toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
dinsdag 20 augustus 2002, 16:00-17:30

1. (a) Ontwikkeling van de termen in een Taylorreeks met als steunpunt x geeft dat de afbreekfout $O(h^4)$ is.

   (b) Het resultaat is uiteraard afhankelijk van het aantal cijfers dat meegenomen wordt bij de berekening. Met 15 cijfers is het resultaat

   $$T_h(1) = 2.71828182816273 \text{ en het verschil is } 3 \times 10^{-10}.$$

   (c) In het meest pessimistische geval is

   $$|\hat{T}_h(x) - T_h(x)| \leq \frac{\epsilon + 16\epsilon + 30\epsilon + 16\epsilon + \epsilon}{12h^2} = \frac{16\epsilon}{3h^2}.$$

   (d) In dit geval is de afrondfout in de functiewaarden hoogstens 5×10^{-6}. Uit onderdeel (c) volgt dan de schatting: $4/15 = 0.267$. Het echte verschil is: $|\hat{T}_h(1) - T_h(1)| = 0.0182$.

2. (a) De versterkingsfactor volgt uit de definitie: schrijf $w_{j+1} = Q(h\lambda)w_j$ voor de testvergelijking $y' = \lambda y$. Neem $f(t, y) = \lambda y$ en substitueer dit in de definitie van RK_4 dan volgt:

   $$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} \ .$$

   .

   (b) De definitie van de afbreekfout is:

   $$\frac{y_{j+1} - \hat{w}_{j+1}}{h},$$

   waarbij $\hat{w}_{j+1}$ gelijk is aan één stap met de RK_4 methode toegepast op y_j. Dit geeft

   $$\frac{y_{j+1} - \hat{w}_{j+1}}{h} = \frac{e^{h\lambda}y_j - Q(h\lambda)y_j}{h} = \frac{\frac{(h\lambda)^5}{5!} + \dots}{h} = O(h^4).$$

   (c) Door de keuze $x_1 = y$ en $x_2 = y'$ volgt:

   $$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 1 - 4x_1 \end{cases}$$

   De eigenwaarden van de matrix zijn: $\lambda_1 = 2i$ en $\lambda_2 = -2i$. Het stelsel is stabiel omdat het reele deel van de eigenwaarden gelijk aan nul is.

(d) Invullen van $h = 1$ en $\lambda_1 = 2i$ geeft:

$$Q(h\lambda_1) = \frac{-1 + 2i}{3}.$$

De modulus hiervan is kleiner dan 1, dus is de methode stabiel voor $h = 1$.