

**Technische Universiteit Delft**  
**Faculteit Informatietechnologie en Systemen**

**Toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen**<sup>1</sup>  
**dinsdag 20 augustus 2002, 16:00-17:30**

1. Een formule om de tweede orde afgeleide  $f''(x)$  te benaderen is

$$T_h(x) = \frac{-f(x-2h) + 16f(x-h) - 30f(x) + 16f(x+h) - f(x+2h)}{12h^2}.$$

- (a) Bepaal de orde van de afbreekfout van deze formule.  
(b) Neem  $f(x) = e^x$  en  $h = 0.01$ . Bepaal  $T_h(1)$  met zo veel mogelijk cijfers. Hoe groot is  $f''(1) - T_h(1)$ ?  
(c) Als  $f$  in een tabel gegeven is, dan de bevatten de tabelwaarden  $\hat{f}(x)$  afrondfouten. Neem aan  $|\hat{f}(x) - f(x)| < \epsilon$ . Hoe groot is  $|\hat{T}_h(x) - T_h(x)|$ ?  
(d) Gegeven de volgende tabel (in 6 cijfers nauwkeurig):

$x$	$e^x$
0.98	2.66445
0.99	2.69123
1	2.71828
1.01	2.74560
1.02	2.77319

Geef met behulp van het antwoord in (c) een schatting van de afrondfout in  $\hat{T}_h(1)$  voor  $h = 0.01$ . Bepaal  $|\hat{T}_h(1) - T_h(1)|$  en vergelijk dit met de schatting.

2. We beschouwen een beginwaardeprobleem  $y' = f(t, y)$ , met  $y(0) = y_0$ . De RK<sub>4</sub> methode wordt gegeven door:

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_j, u_j), \\ k_2 = hf(t_{j+\frac{1}{2}}, u_j + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 = hf(t_{j+\frac{1}{2}}, u_j + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 = hf(t_{j+1}, u_j + k_3), \\ u_{j+1} = u_j + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van RK<sub>4</sub> gelijk is aan:

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!}.$$

- (b) Geef de orde van de afbreekfout van RK<sub>4</sub> voor de testvergelijking. Z.O.Z.

---

<sup>1</sup>voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html>

(c) Gegeven het beginwaardeprobleem:

$$y'' + 4y = 1, \quad y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = 0.$$

Schrijf deze vergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Is het stelsel differentiaalvergelijkingen stabiel?

(d) Als we RK<sub>4</sub> toepassen op dit stelsel en we nemen  $h = 1$ , is de RK<sub>4</sub> methode dan stabiel?