Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen

Uitwerkingen toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
maandag 24 maart 2003, 14:00-15:30

1. (a) Om aan te tonen dat S'' continu is behoeven we allen naar de aansluiting te kijken in de knooppunten, immers in het inwendige van elk interval is de spline een 3^e graadspolynoom, dat per definitie een continue 2^e afgeleide heeft. In de knooppunten moet gelden:

$$S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1}).$$

Uit de definitie van de spline volgt: $S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$.
Voor de aansluiting moet dan voldaan zijn aan de gelijkheid:

$$2c_j + 6d_j h_j = 2c_{j+1}.$$

Deze gelijkheid is geldig omdat $d_j = \frac{c_{j+1}-c_j}{3h_j}$.

(b) Voor de bepaling van $S(2)$ gaan we eerst een aantal gegevens opschrijven:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, \quad f(x_0) = 0, f(x_1) = 1, f(x_2) = 27,$$

$$h_0 = 1, h_1 = 2, n = 2, \quad a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 27.$$

Voor het bepalen van de c_j lossen we het stelsel op. Eenvoudig is te zien dat $c_0 = 0$ en $c_2 = 0$. Voor c_1 geldt:

$$2(h_0 + h_1)c_1 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0).$$

Alle gegevens invullen geeft: $6c_1 = 36$, zodat $c_1 = 6$. Voor het bepalen van $S(2)$ is het voldoende om b_1 en d_1 te bepalen. Hiervoor gebruiken we de formules:

$$b_1 = \frac{a_2 - a_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2) = 5$$

en

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} = -1.$$

Hieruit volgt: $S_1(x) = 1 + 5(x-1) + 6(x-1)^2 - (x-1)^3$, zodat $S_1(2) = 11$. De relatieve fout is $\frac{|f(2)-S(2)|}{|f(2)|} = \frac{3}{8}$.

(c) Merk op dat door de verstoring geldt $\hat{a}_j = a_j + \epsilon$. Alle andere constanten veranderen niet, dus $\hat{S}(x) = S(x) + \epsilon$. Hieruit volgt de bovengrens $|\hat{S}(x) - S(x)| \le \epsilon$.

(d) Uit onderdeel (b) volgt:

$$S_1'(x) = 5 + 12(x-1) - 3(x-1)^2,$$

dus $S_1'(2) = 14$. Met de centrale differentie krijgen we de volgende benadering: $\frac{f(3)-f(1)}{2} = 13$. Het exacte antwoord is: $f'(2) = 12$. Merk op dat de benadering met de centrale differentie nauwkeuriger is en minder werk kost. In deze situatie geven we de voorkeur aan de centrale differentie.

2. (a) Dit is een expliciete eenstapsmethode.

(b) Voor het bepalen van de lokale afbreekfout gebruiken we de definitie:

$$\tau_{j+1}(h) = \frac{y_{j+1} - \bar{w}_{j+1}}{h}. \tag{1}$$

Om te laten zien dat de lokale afbreekfout $O(h^2)$ gebruiken we de volgende Taylor ontwikkeling

$$y_{j+1} = y_j + hy'_j + \frac{h^2}{2}y''_j + O(h^3). \tag{2}$$

Uitschrijven van $\bar{w}_{j+1}$ geeft:

$$\bar{w}_{j+1} = y_j + \frac{h}{4}[f(t_j, y_j) + 3f(t_j + \frac{2}{3}h, y_j + \frac{2}{3}hf(t_j, y_j))]. \tag{3}$$

Met behulp van het Taylorpolynoom in twee variabelen vinden we:

$$f(t_j+\frac{2}{3}h, y_j+\frac{2}{3}hf(t_j, y_j)) = f(t_j, y_j)+\tfrac{2}{3}h\tfrac{\partial f}{\partial t}(t_j, y_j)+\tfrac{2}{3}hf(t_j, y_j)\tfrac{\partial f}{\partial y}(t_j, y_j)+O(h^2)$$

Dit invullen in (3) geeft:

$$\bar{w}_{j+1} = y_j + f(t_j, y_j) + \frac{1}{2}h^2(\frac{\partial f}{\partial t}(t_j, y_j) + f(t_j, y_j)\frac{\partial f}{\partial y}(t_j, y_j)).$$

Wegens de differentiaalvergelijking geldt $f(t_j, y_j) = y'_j$ en nogmaals differentiëren van de DV naar t geeft

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}f$$

zodat $\bar{w}_{j+1} = y_j + hy'_j + \frac{h^2}{2}y''_j$. Dit invullen in (1) tezamen met (2) geeft:

$$\tau_{j+1}(h) = O(h^2).$$

(c) De versterkingsfactor is $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2$.

(d) We schrijven het beginwaarde probleem eerst als stelsel, met $x_1 = y$ en $x_2 = y'$. Het stelsel is dan

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ cos(t) \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van dit stelsel zijn $\lambda_1 = -1 + i$ en $\lambda_2 = -1 - i$. Merk op dat het stelsel stabiel is, immers $Re(\lambda) \leq 0$. Omdat $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ behoeven we alleen te controleren of $|Q(h\lambda_1)| \leq 1$. Invullen van $\lambda_1 = -1 + i$ geeft $Q(h\lambda_1) = 1 - h + hi(1 - h)$. Omdat $h = 1$ volgt $Q(h\lambda_1) = 0$ zodat de methode stabiel is voor deze keuze van h.

(e) Het antwoord is

$$\begin{pmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{0.1}{4}\begin{pmatrix} -1 - 3 \cdot 0.933 \\ 1 + 3cos(\frac{0.2}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.905 \\ -0.9002 \end{pmatrix}.$$