Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen

Toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen maandag 24 maart 2003, 14:00-15:30

1. De formules voor de cubische spline worden gegeven door:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x \in [x_j, x_{j+1}],$$

waarbij

$$a_j = f(x_j), \quad h_j = x_{j+1} - x_j, \quad d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}, \quad b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Toon aan dat S'' continu is op $[x_0, x_n]$.

(b) Gegeven is $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ en $x_2 = 3$. Bepaal $S(2)$ als benadering voor $f(2)$ en geef de relatieve fout.

(c) Stel dat er een fout gemaakt wordt in de functie, zodat $\hat{f}(x) = f(x) + \epsilon$, met ϵ constant. Leid een bovengrens af voor $|\hat{S}(x) - S(x)|$.

(d) Bepaal $S'(2)$ als benadering van $f'(2)$. Geef ook een benadering van $f'(2)$ met behulp van de centrale differentie en vergelijk beide benaderingen.

[0] **voor vervolg z.o.z**

2. We beschouwen de numerieke integratie methode:

$$w_{j+1} = w_j + \frac{h}{4}[f(t_j, w_j) + 3f(t_j + \frac{2}{3}h, w_j + \frac{2}{3}hf(t_j, w_j))]. \tag{1}$$

   (a) Is dit een eenstapsmethode of een meerstapsmethode? Is de methode impliciet of expliciet?

   (b) Toon aan dat de lokale afbreekfout $O(h^2)$ is.

   (c) Leid de versterkingsfactor van deze methode af.

   (d) We beschouwen het volgende beginwaarde probleem:

$$y'' + 2y' + 2y = cos(t), \text{ met } y(0) = 1 \text{ en } y'(0) = -1.$$

   Ga na of de numerieke integratie van dit probleem met methode (1) met stapgrootte $h = 1$ stabiel is.

   (e) Doe één stap met methode (1) met $h = 0.1$ toegepast op bovenstaand probleem.

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/tentamen.html