

Numerieke stabiliteit voor de testvergelijking

We beschouwen twee numerieke oplossingen van de testvergelijking (5.23): u_i met beginvoorwaarde $u_0 = y_0$ en v_i met beginvoorwaarde $v_0 = y_0 + \varepsilon_0$. Het blijkt dat voor alle van belang zijnde numerieke methoden het verschil van deze oplossingen $\varepsilon_i = v_i - u_i$ precies de numerieke oplossing is van (5.24). Het schema heet stabiel als

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\varepsilon_j| < \infty$$

en absoluut stabiel als

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\varepsilon_j| = 0.$$

Uit (5.7) volgt $\varepsilon_{j+1} = k(h\lambda)\varepsilon_j$. Uit volledige inductie blijkt $\varepsilon_j = [k(h\lambda)]^j \varepsilon_0$. Een numeriek schema is dus stabiel dan en slechts dan als

$$|k(h\lambda)| \leq 1. \quad (1)$$

In (1) is λ gegeven en de vraag is dus voor welke h is er aan ongelijkheid (1) voldaan.

Voor de voorwaartse methode van Euler geldt $k(h\lambda) = 1 + h\lambda$. Neem aan dat $\lambda \leq 0$ zodat het beginwaarde probleem stabiel is. Om aan (1) te voloen moet h zo gekozen worden dat

$$-1 \leq 1 + h\lambda \leq 1,$$

ofwel

$$-2 \leq h\lambda \leq 0.$$

Omdat $h > 0$ en $\lambda \leq 0$ volgt hieruit $h \leq \frac{2}{|\lambda|}$.

Voor Euler achterwaarts moet gelden

$$-1 \leq \frac{1}{1 - h\lambda} \leq 1.$$

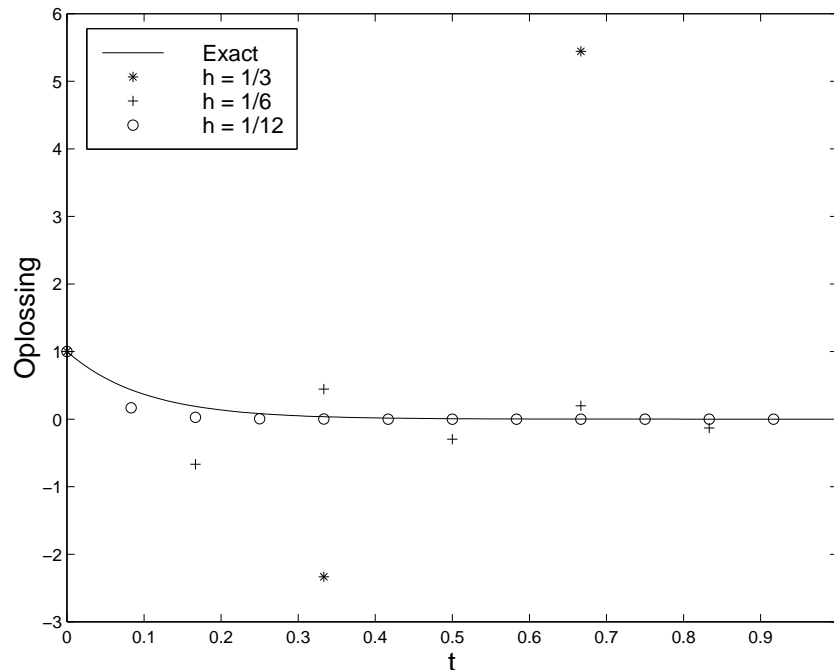
Eenvoudig is in te zien dat hier voor elke $h \geq 0$ aan voldaan is omdat $\lambda \leq 0$, zodat de achterwaartse methode van Euler onvoorwaardelijk stabiel is als $\lambda \leq 0$.

Eenzelfde analyse geeft dat voor $\lambda \leq 0$ de methode van Heun stabiel is als $h < \frac{2}{|\lambda|}$. De Trapeziomregel is ook onvoorwaardelijk stabiel als $\lambda \leq 0$.

Voorbeeld (numerieke stabiliteit)

Als voorbeeld nemen we het beginwaarde probleem:

$$\begin{aligned} y' &= -10y, & t \in [0, 1], \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$



Figuur 1: Euler voorwaarts toegepast op $y' = -10y$

De exacte oplossing wordt gegeven door $y(t) = e^{-10t}$. Uit de theorie volgt dat Euler voorwaarts stabiel is als $h \leq 0.2$. In Figuur 1 staat de numerieke oplossing voor de stapgroottes $h = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{12}$. De methode is inderdaad instabiel als $h = \frac{1}{3}$.

Voor $h = \frac{1}{6}$ en $\frac{1}{12}$ blijkt dat de numerieke oplossing naar de exacte oplossing convergeert. De achterwaartse methode van Euler is stabiel voor alle stapgroottes (zie Figuur 2).

Numerieke stabiliteit voor een algemene vergelijking

Voor een algemeen beginwaarde probleem

$$y' = f(t, y) \quad \text{en} \quad y(0) = y_0,$$

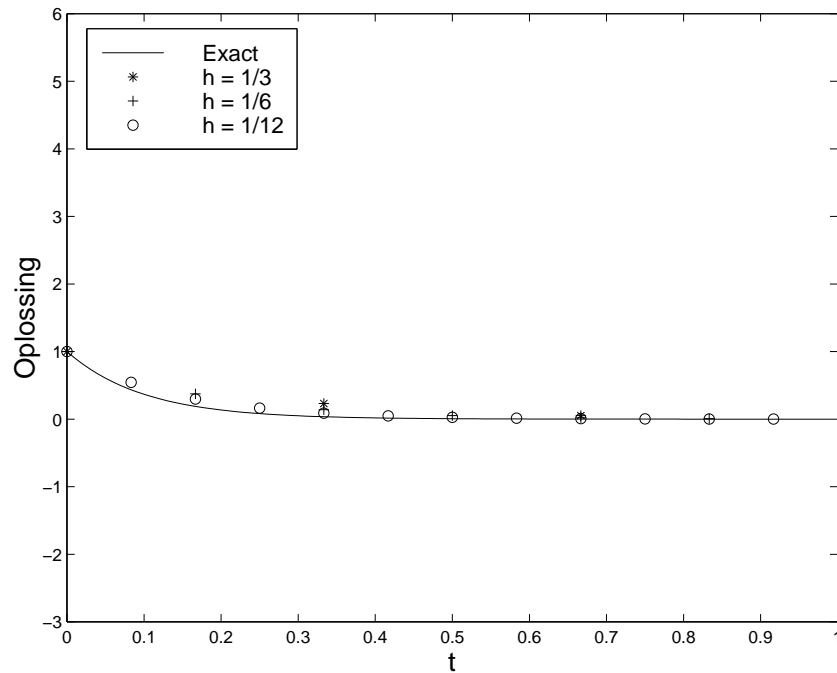
kunnen we een indruk krijgen van de stabiliteitseigenschappen door f te lineariseren rondom een gegeven punt, bijvoorbeeld (t_0, y_0) . Vervang $f(t, y)$ door de lineaire benadering

$$f(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0).$$

De differentiaalvergelijking gedraagt zich in de buurt van (t_0, y_0) als

$$y' = f(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0).$$

Als we dit vergelijken met de testvergelijking (5.23), dan blijkt dat we dezelfde analyse kunnen volgen, waarbij λ gelijk genomen wordt aan $\frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)$. Merk op dat de stabiliteitsvoorwaarde nu



Figuur 2: Euler achterwaarts toegepast op $y' = -10y$

afhankelijk van y_0 en t_0 .

Voorbeeld(stabiliteit stuwmeer)

Het debiet Q dat uit het stuwmeer stroomt voldoet aan

$$\frac{dQ}{dt} = p(t) - aQ^2,$$

zodat $f(t, Q) = p(t) - aQ^2$. In de stabiliteitsanalyse gebruiken we

$$\frac{\partial f}{\partial Q}(t_0, Q_0) = -2aQ_0.$$

Merk op dat voor alle positieve a en Q de differentiaalvergelijking stabiel is. Euler voorwaarts is stabiel als

$$h \leq \frac{1}{aQ_0},$$

zodat de bovengrens voor h kleiner wordt als Q_0 toeneemt.