TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
maandag 28 januari 2013, 18:30-21:30

1. De modified Euler methode voor de integratie van beginwaarde probleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, is gegeven door

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n) \\ \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right). \end{cases} \tag{1}$$

waarin h de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

[a] Toon aan dat de locale afbreekfout van deze methode $O(h^2)$ is. (3 pt)

De versterkingsfactor wordt gegeven door

$$Q(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}.$$

[b] Leid deze versterkingsfactor voor de modified Euler methode af. (1 pt)

Gegeven het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 12\dfrac{dy}{dt} + 72y = \sin t, \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2. \end{cases} \tag{2}$$

[c] Laat zien dat bovenstaand beginwaarde probleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -72 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (2 pt)

[d] Bereken één stap met de modified Euler methode, waarbij $h = 0.1$ en $t_0 = 0$ met de gegeven beginvoorwaarden uit (2). (2 pt)

[e] Ga na of de modified Euler methode, toegepast op het gegeven beginwaarde probleem (2), stabiel is voor $h = 0.25$. (2 pt)

---

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. Van een voertuig wordt de snelheid geschat. De toegestane maximumsnelheid is 40 m/s. De gemeten posities van het voertuig staan in de onderstaande tabel.

t (s)	0	1	2
$f(t)$ (m)	200	215	250

   (a) Geef de 1^e orde achterwaartse differentieformule en bepaal hiermee een schatting van de snelheid op $t = 2$ ($f'(2)$). (1 pt.)

   (b) We zoeken een differentie formule voor de eerste afgeleide van f in het punt $2h$ van de vorm: $Q(h) = \frac{\alpha_0}{h} f(0) + \frac{\alpha_1}{h} f(h) + \frac{\alpha_2}{h} f(2h)$, zodat $f'(2h) - Q(h) = O(h^2)$. Laat zien dat de coefficienten α_0, α_1 en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\,, \\ -2\alpha_0 & - & \alpha_1 & & & = & 1\,, \\ 2\alpha_0 h & + & \frac{1}{2}\alpha_1 h & & & = & 0\,. \end{array}$$

(2 pt.)

   (c) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Geef een uitdrukking voor de afbreekfout $f'(2h) - Q(h)$ en een schatting van de snelheid. (2 pt.)

   (d) De gemeten posities hebben een maximale meetfout van ϵ: $|f(t) - \hat{f}(t)| \leq \epsilon$. Laat zien, dat voor de meetfout in de benadering geldt: $|Q(h) - \hat{Q}(h)| \leq \frac{C_1 \epsilon}{h}$ en geef C_1. (1.5 pt.)

   (e) Leid met behulp van het lineaire interpolatiepolynoom de trapeziumregel om $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ te benaderen af. (1.5pt.)

   (f) Leid af dat de afbreekfout van de enkelvoudige trapeziumregel over het interval $[x_0, x_1]$ gegeven is door $\frac{1}{12}(x_1 - x_0)^3 \max_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|$, indien de tweede orde afgeleide van $f(x)$ continu is op $[x_0, x_1]$. *Hint: De fout voor lineaire interpolatie over steunpunten x_0 en x_1 wordt gegeven door*

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)(x - x_1) f''(\chi), \ \textit{voor zekere } \chi \in (x_0, x_1),$$

waarin $p_1(x)$ het lineaire interpolatiepolynoom voorstelt. (2pt.)