TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU en CTB2400)
donderdag 14 augustus 2014, 18:30-21:30

1. In deze opgave beschouwen we predictor-corrector methoden van het volgende type:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, w_n) \\ k_2 &= hf(t_n + h, w_n + k_1) \\ w_{n+1} &= w_n + \beta\ k_1 + (1-\beta)\ k_2. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Toon aan, voor de algemene vergelijking $y' = f(t, y)$, dat de lokale afbreekfout $\mathrm{O}(h^2)$ is voor $\beta = \frac{1}{2}$ en $\mathrm{O}(h)$ voor alle andere waarden van β. (3 pt)

b) Bepaal de versterkingsfactor voor willekeurige β. (2 pt)

c) De methode (1) kan worden toegepast op het stelsel

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \tag{2}$$

Toon aan dat de stapgrootte h moet voldoen aan

$$h^2 < \frac{1-2\beta}{(1-\beta)^2} \tag{3}$$

om (2) stabiel te kunnen integreren. Voor welke waarden van β is stabiele integratie mogelijk? (2 pt)

d) Toon aan dat de stabiliteitsgrens in (3) optimaal wordt voor $\beta = 0$ en geef deze stabiliteitsgrens. (Hint: de afgeleide van $\frac{1-2\beta}{(1-\beta)^2}$ is gelijk aan $\frac{-2\beta}{(1-\beta)^3}$). (1 pt)

e) Stel $\beta = 0$, en laat de initiele voorwaarde gegeven worden door $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 1$. Kies $h = 0.5$ om de numerieke oplossing op het volgende tijdstip te berekenen. (2 pt)

---

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We onderzoeken Lagrange interpolatie. Voor gegeven steunpunten x_0, x_1 …, x_n met bijbehorende functiewaarden $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, wordt het interpolatiepolynoom $p_n(x)$, gegeven door

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x), \text{ met}$$
$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(\ldots)(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})(\ldots)(x-x_n)}{(x_i-x_0)(\ldots)(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})(\ldots)(x_i-x_n)}. \tag{4}$$

Verder zijn de volgende meetwaarden gegeven in tabelvorm:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1	2
2	2	4

(a) Geef het lineaire interpolatiepolynoom van Lagrange met steunpunten x_0 en x_1. (1pt.)

(b) Geef de kwadratische interpolatieformule van Lagrange met steunpunten x_0, x_1 en x_2. (2pt.)

(c) Benader $f(0.5)$ eerst met lineaire interpolatie en dan met kwadratische interpolatie. (2pt.)

(d) Stel dat de functiewaarden in de tabel een meetfout bevatten met grootte van ten hoogste ε. Laat zien dat de fout, ten gevolge van de onnauwkeurigheid van de meetdata, voor lineaire interpolatie binnen steunpunten x_0 en x_1 begrensd is. (1pt.)

(e) Gegeven is het iteratieproces $x_{n+1} = g(x_n)$, met

$$g(x_n) = x_n + h(x_n)(x_n^3 - 3),$$

waarbij h een continue functie is met $h(x) \neq 0$ voor elke $x \neq 0$. Als dit proces convergeert, naar welke limiet p convergeert het dan? (1pt.)

(f) Beschouw drie mogelijke keuzen voor $h(x)$:

i. $h_1(x) = -\frac{1}{x^4}$
ii. $h_2(x) = -\frac{1}{x^2}$
iii. $h_3(x) = -\frac{1}{3x^2}$

Voor welke keuze kan het proces niet convergeren? Voor welke keuze convergeert het proces het snelst? Motiveer uw antwoord. (2pt.)

(g) p is een nulpunt van een gegeven functie f. $\hat{f}$ is de functie verstoord door meetfouten. Er is gegeven dat $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon_{max}$ voor alle x. Laat zien dat voor het nulpunt $\hat{p}$ van $\hat{f}$ geldt $|\hat{p} - p| \leq \frac{\epsilon_{max}}{|f'(p)|}$. (1pt.)