TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU AESB2210)
Thursday January 29 2015, 18:30-21:30

1. Voor het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, gebruiken we de integratiemethode

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{h}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right), \end{cases} \tag{1}$$

waarin h de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van deze integratiemethode van de orde $O(h^2)$ is. (U mag hier niet de testvergelijking gebruiken.) (3pt.)

Gegeven het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = \cos t, \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Laat zien dat bovenstaand beginwaarde probleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (1pt.)

(c) Bereken één stap met deze methode, waarbij $h = 0.1$ en $t_0 = 0$ met de gegeven beginvoorwaarden. (2pt.)

(d) Leid de versterkingsfactor voor deze integratiemethode af. (2pt.)

(e) Bepaal voor welke stapgrootte $h > 0$ deze integratiemethode toegepast op beginwaarde probleem (2), stabiel is. (2pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. Van een roeiboot wordt de snelheid geschat. De gemeten afstanden van de boot vanaf de startlijn staan in de onderstaande tabel.

t (s)	0	10	20
$d(t)$ (m)	0	40	100

(a) Geef de 1^e orde achterwaartse differentieformule en bepaal hiermee een schatting van de snelheid op $t = 20$ ($d'(20)$). (1 pt.)

(b) We zoeken een differentieformule voor de eerste afgeleide van d in het punt $2h$ van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h} d(0) + \frac{\alpha_1}{h} d(h) + \frac{\alpha_2}{h} d(2h),$$

zodat

$$d'(2h) - Q(h) = O(h^2).$$

In de rest van de opgave werken we verder met deze formule. Laat zien dat de coefficienten α_0, α_1 en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\,, \\ -2\alpha_0 & - & \alpha_1 & & & = & 1\,, \\ 2\alpha_0 h & + & \frac{1}{2}\alpha_1 h & & & = & 0\,. \end{array}$$

(2 pt.)

(c) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $d'(2h) - Q(h)$. Geef opnieuw een schatting van de snelheid op $t = 20$. (2 pt.)

(d) De gemeten posities hebben een maximale meetfout van ϵ: $|d(t) - \hat{d}(t)| \leq \epsilon$. Laat zien, dat voor de meetfout in de benadering geldt:

$$|Q(h) - \hat{Q}(h)| \leq \frac{C_1 \epsilon}{h}$$

en geef C_1. (1.5 pt.)

Gegeven is de Newton-Raphson methode

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

(e) Leid de bovenstaande Newton-Raphson methode af. (1 pt.)

(f) We zoeken het positieve nulpunt van $f(x) = e^{\sin(x)} - \frac{1}{e}$.

- Neem als startwaarde $p_0 = \pi$ en bepaal p_1 met de Newton-Raphson methode.
- Neem als startwaarde $p_0 = \frac{3}{2}\pi$ en motiveer of dit een geschikte keuze is voor de Newton-Raphson methode.

(2.5 pt.)