TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU AESB2210 CTB2400)
Thursday Juli 2 2015, 18:30-21:30

1. We beschouwen de volgende predictor-corrector methode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} w^*_{n+1} &= w_n + \Delta t f(t_n, w_n), \\ w_{n+1} &= w_n + \Delta t \left((1-\mu) f(t_n, w_n) + \mu f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

waarin Δt de tijdstap, μ een reëel getal ($0 \leq \mu \leq 1$) en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van de bovenstaande methode voor $0 \leq \mu \leq 1$ van de orde $O(\Delta t)$ is en voor $\mu = \frac{1}{2}$ is de orde $O((\Delta t)^2)$. (*N.B. Dit moet afgeleid worden voor de algemene differentiaalvergelijking* $y' = f(t, y)$). (3 pt)

(b) Leid af dat de versterkingsfactor van deze methode gegeven wordt door

$$Q(\lambda \Delta t) = 1 + \lambda \Delta t + \mu (\lambda \Delta t)^2.$$

(2 pt)

(c) We beschouwen het volgende stelsel niet lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + \cos x_1 + 2x_2 + t, \ x_1(0) = 0, \\ x_2' &= x_1 - x_2^2, \ x_2(0) = 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Voer één stap uit met de methode gegeven in (1) met $\Delta t = \frac{1}{2}$ en $\mu = \frac{1}{2}$. (1 pt)

(d) Laat zien dat de Jacobiaan van het rechterlid van (2) op $t = 0$ gegeven wordt door:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1 pt)

(e) Kies $\mu = 0$. Voor welke waarden van Δt is de methode toegepast op (2) stabiel op $t = 0$? Beantwoord dezelfde vraag voor $\mu = \frac{1}{2}$. (3 pt)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen de convectie–diffusie vergelijking met Dirichlet randvoorwaarden:

$$\begin{cases} -u'' + u' = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

waarin $u = u(x)$, $u' = \frac{du}{dx}$ en $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$.

(a) Laat zien dat

$$u(x) = x - \frac{1-e^x}{1-e}, \tag{4}$$

de exacte oplossing is van randwaardeprobleem (3). (1 pt.)

(b) We lossen randwaardeprobleem (3) op met eindige differenties, waarin $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$, met Δx als uniforme stapgrootte. Geef een discretisatiemethode (+bewijs) waarvoor de afbreekfout van orde $O((\Delta x)^2)$ is. Behandel ook de randvoorwaarden. (2 pt.)

(c) Leg uit waarom oscillerende numerieke oplossingen voor (3) als onbetrouwbaar gezien moeten worden. (1 pt.)

(d) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = 1/4$ om het stelsel vergelijkingen $Ay = b$ af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel heeft drie vergelijkingen met drie onbekenden, dat betekent dat A een 3×3 matrix is en y en b 1×3 kolomvectoren zijn. Dit stelsel vergelijkingen hoeft **niet** opgelost te worden. (2 pt.)

(e) Gegeven is het iteratieproces $x_{n+1} = g(x_n)$, met

$$g(x_n) = x_n + h(x_n)(x_n^3 - 27),$$

waarbij h een continue functie is met $h(x) \neq 0$ voor elke $x \neq 0$. Als dit proces convergeert, naar welke limiet p convergeert het dan? (1 pt.)

(f) Beschouw drie mogelijke keuzen voor $h(x)$:

i. $h_1(x) = -\frac{1}{x^4}$
ii. $h_2(x) = -\frac{1}{x^2}$
iii. $h_3(x) = -\frac{1}{3x^2}$

Voor welke keuze kan het proces niet convergeren? Voor welke keuze convergeert het proces het snelst? Motiveer uw antwoord. (2 pt.)

(g) p is een nulpunt van een gegeven functie f. $\hat{f}$ is de functie verstoord door meetfouten. Er is gegeven dat $|\hat{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon_{max}$ voor alle x. Laat zien dat voor het nulpunt $\hat{p}$ van $\hat{f}$ geldt $|\hat{p} - p| \leq \frac{\epsilon_{max}}{|f'(p)|}$. (1 pt.)