

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU CTB2400)
Donderdag 13 Augustus 2015, 18:30-21:30**

1. In deze opgave maken we gebruik van de trapeziummethode voor de integratie van het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$ met $y(t_0) = y_0$:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})) \quad (1)$$

- (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van de trapeziummethode gegeven wordt door

$$Q(\Delta t \lambda) = \frac{1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}}{1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}}. \quad (1 \text{ pt.})$$

- (b) Geef de orde (+ bewijs) van de lokale afbreekfout van de trapeziummethode voor de testvergelijking (hint de volgende reeksen kunnen gebruikt worden: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ en $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$). (3 pt.)

- (c) Doe één stap met de trapeziummethode voor het volgende beginwaardeprobleem

$$y' = -2y + e^t, \text{ met } y(0) = 2,$$

en stapgrootte $\Delta t = 1$. (2 pt.)

- (d) We beschouwen het beginwaarde probleem:

$$y'' = -y' - \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Schrijf deze tweede orde differentiaalvergelijking als een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen: $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Toon aan dat de eigenwaarden van \mathbf{A} gegeven worden door

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \text{ en } \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \quad (2 \text{ pt.})$$

- (e) Onderzoek de stabiliteit van de trapeziummethode toegepast op het stelsel gegeven in (d). (2 pt.)

⁰voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html>

2. We onderzoeken Lagrange interpolatie. Voor gegeven steunpunten x_0, x_1, \dots, x_n met bijbehorende functiewaarden $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, wordt het interpolatiepolynoom $p_n(x)$, gegeven door

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x), \text{ met} \tag{2}$$

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(\dots)(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(\dots)(x - x_n)}{(x_i - x_0)(\dots)(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(\dots)(x_i - x_n)}.$$

Verder zijn de volgende meetwaarden gegeven in tabelvorm:

i	x_i	$f(x_i)$
0	-1	3
1	0	2
2	1	5

- (a) Geef het lineaire interpolatiepolynoom van Lagrange met steunpunten x_0 en x_1 . (1pt.)
- (b) Geef de kwadratische interpolatieformule van Lagrange met steunpunten x_0, x_1 en x_2 . (2 pt.)
- (c) Benader $f(0)$ en $f(0.5)$ eerst met lineaire interpolatie en dan met kwadratische interpolatie. (2 pt.)

Gegeven is de Newton-Raphson methode

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

- (d) Leid de bovenstaande Newton-Raphson methode af. (1.5 pt.)
- (e) We zoeken het positieve nulpunt van $f(x) = e^x - x^3$. Neem als startwaarde $p_0 = 2$ en bepaal p_1 en p_2 met de Newton-Raphson methode. (1.5 pt.)
- (f) Laat p de oplossing van $f(p) = 0$ zijn. Toon aan dat dan geldt

$$|p - p_{n+1}| = K|p - p_n|^2, \text{ voor } n \rightarrow \infty \tag{3}$$

en bepaal de waarde van de constante K . (2 pt.)