TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU/Minor AESB2210)
Donderdag 28 Januari 2016, 18:30-21:30

1. We beschouwen de numerieke integratie van het volgende beginwaardeprobleem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

We gebruiken de *voorwaartse methode van Euler* om de numerieke oplossing van dit beginwaardeprobleem (1) te bepalen. Deze methode is gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n), \tag{2}$$

waarin Δt de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Bepaal, met gedegen toelichting, de orde van de locale afbreekfout. (2.5 pt.)

(b) We beschouwen het volgende tweede orde beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + \varepsilon y' + y = \sin(t), \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Herschrijf, met gedegen toelichting, dit beginwaardeprobleem (3) in de vorm van een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Neem ook de beginvoorwaarden mee. (1 pt.)

We gaan verder met het volgende stelsel beginwaardeproblemen

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1 + \varepsilon y_2, \end{cases} \tag{4}$$

met beginvoorwaarden $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 2$, en verder is $\varepsilon \in \mathbb{R}$ een gegeven constante.

(c) Wat is de maximaal toelaatbare waarde van Δt voor numerieke stabiliteit als $\varepsilon = 0$? Geef een gedegen toelichting. (2.5 pt.)

(d) Voor welke waarden van ε is het gegeven stelsel (analytisch) stabiel? Geef een goede toelichting. (2 pt.)

We onderzoeken de numerieke stabiliteit met de voorwaartse methode van Euler voor het gegeven stelsel beginwaardeproblemen (4) voor algemene waarden van ε.

voor vervolg z.o.z.

(e) Wat is de maximaal toelaatbare waarde van Δt voor numerieke stabiliteit indien $-2 \leq \varepsilon < 0$? Licht het antwoord toe. (2 pt.)

2. We beschouwen we het volgende randwaardeprobleem

$$\begin{cases} -y''(x) + (x+1)y(x) = x^3 + x^2 - 2, & 0 < x < 1, \\ \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, & \end{cases} \tag{5}$$

met $y' = \frac{dy}{dx}$ en $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

(a) We willen het randwaardeprobleem (5) met behulp van de eindige differentie methode oplossen. Laat $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$ waarin de stapgrootte Δx constant is. Geef een discretisatie (+ bewijs) met

- locale afbreekfout van $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$;
- verwerking van de randvoorwaarden;
- en een symmetrische discretisatie matrix.

Gebruik een virtueel gridpunt voor de randvoorwaarde op $x = 0$. (2.5 pt.)

(b) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen $\mathbf{Aw} = \mathbf{f}$ voor de discretisatie uit deel (a) af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel moet 3×3 zijn (drie onbekenden en drie vergelijkingen). (1 pt.)

(c) Omdat de 3×3 discretisatie matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch is, zijn alle eigenwaarden reëel. Maak gebruik van de Gershgorin-cirkel stelling om een schatting voor de kleinste eigenwaarde $|\lambda|_{\min}$ te berekenen. Concludeer hieruit dat het eindige differentie schema uit (a) stabiel is. Dat betekent dat $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat en dat er een constante C bestaat zó dat $\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq C$ als $\Delta x \to 0$. (1.5 pt.)

3. We beschouwen de functie $f(x) = -x^3 + 6x - 2\frac{7}{8}$.

(a) Definieer de vaste punt iteratie met behulp van de functie $g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{23}{48}$. Toon aan dat een vast punt van g gelijk is aan een wortel van f. Start met $p_0 = 1$ en bereken p_1, p_2 en p_3. (2 pt.)

(b) Schets de vaste punt iteratie in een figuur (waarin $g(p_k)$ als functie van p_k wordt uitgezet) gebruikmakend van de iteraties p_0, p_1, p_2 and p_3 berekend in (a). (1 pt.)

(c) Toon aan dat de vaste punt iteratie convergeert voor alle $p_0 \in [0, 1]$. (2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html