TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU/Minor AESB2210)
Donderdag 2 Februari 2017, 18:30-21:30

1. In deze opgave maken we gebruik van de Trapeziumregel om de oplossing van het **beginwaardeprobleem** $y' = f(t, y)$ met $y(t_0) = y_0$ te benaderen. Deze methode wordt gegeven door:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{\Delta t}{2} \left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1}) \right) \tag{1}$$

   (a) Laat zien dat de versterkingsfactor van de Trapeziumregel gegeven wordt door

$$Q(\lambda \Delta t) = \frac{1 + \frac{\lambda \Delta t}{2}}{1 - \frac{\lambda \Delta t}{2}}.$$

   (2 pt.)

   (b) Geef de orde (+ bewijs) van de lokale afbreekfout van de Trapeziumregel voor de testvergelijking.
   Hint:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

   (3 pt.)

   (c) Toon aan dat voor een algemene complexe $\lambda = \mu + i\nu$ de methode stabiel is voor elke stapgroote $\Delta t > 0$ als $\mu \leq 0$. (2 pt.)

   (d) Doe één stap met de Trapeziumregel voor het volgende beginwaardeprobleem

$$y' = -(1 + 2t)y + t, \text{ met } y(0) = 1,$$

   en stapgrootte $\Delta t = \frac{1}{2}$. (1.5 pt.)

   (e) Maak voor dit probleem (gegeven in onderdeel d) een vergelijking van de Trapeziumregel en de Euler Voorwaarts methode. Aan welke methode geeft u de voorkeur (+ motivatie)? (1.5 pt.)

2. We beschouwen het volgende **randwaardeprobleem** (differentiaalvergelijking met randvoorwaarden):

$$\begin{cases} -y'' + xy = x^3 - 2, & x \in (0, 1) \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 1. \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Laat Δx de stapgrootte zijn. Geef een discretisatie met een fout van $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ (+ bewijs) zo dat $x_n = 1$. Gebruik een virtueel gridpunt bij $x = 0$. (3 pt.)

   (b) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel moet 3×3 zijn (drie onbekenden en drie vergelijkingen). (2 pt.)

voor vervolg z.o.z.

3. In deze opgave maken we gebruik van een **hypothetische computer** die met floating point (decimale) getallen kan rekenen. Deze computer heeft de volgende specificaties:

   - Ieder reëel getal wordt voorgesteld als floating point number met vier cijfers achter de komma;
   - De floating point weergave vindt plaats door *afronding*.

   Dus als voorbeeld: $fl(5/7) = fl(0.714285714\ldots) = 0.7143 \cdot 10^0$. In de opgave beschouwen we volgende twee gegeven getallen

$$x = 2/3 = 0.666666666\ldots$$
$$y = 1999/3000 = 0.666333333\ldots.$$

   (a) Bereken $x + y$, $x - y$, $fl(fl(x) + fl(y))$ en $fl(fl(x) - fl(y))$, met de hierboven gegeven waarden voor x en y, als exacte uitkomsten en computerweergaven van deze uitkomsten. (1.5 pt.)

   (b) Geef de relatieve fout die optreedt als gevolg van de afronding in de berekeningen door onze computer voor $x + y$ en $x - y$. (1.5 pt.)

   (c) Geef een motivatie waarom de relatieve fout in het algemeen als $x \approx y$ voor $x - y$ dramatisch hoger ligt dan voor $x + y$ onder aanname dat $x, y > 0$. (2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html