TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

**TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN ( CTB2400 )**
**Donderdag 17 Augustus 2017, 18:30-21:30**

1. We beschouwen de volgende methode

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \Delta t \left(a_1 f(t_n, w_n) + a_2 f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right) \end{cases} \tag{1}$$

voor de integratie van het **beginwaardeprobleem** $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$

(a) Toon aan dat de *locale afbreekfout* van de bovenstaande methode van de orde $O(\Delta t)$ is als $a_1 + a_2 = 1$. Voor welke waarde van $a_1$ en $a_2$ is de locale afbreekfout van de orde $O((\Delta t)^2)$? (3 pt.)

(b) Laat zien dat de *versterkingsfactor* voor algemene $a_1$ en $a_2$ gegeven wordt door

$$Q(\lambda\Delta t) = 1 + (a_1 + a_2)\lambda\Delta t + a_2(\lambda\Delta t)^2. \tag{2}$$

(2 pt.)

(c) Beschouw $\lambda < 0$ en $(a_1 + a_2)^2 - 8a_2 < 0$. Leid de *stabiliteitsvoorwaarde* af waar $\Delta t$ aan moet voldoen. (2 pt.)

We passen de methode toe op het volgende *stelsel differentiaalvergelijkingen*

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \tag{3}$$

met beginvoorwaarde $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 0$.

(d) Gebruik $\Delta t = \frac{1}{2}$ om $w^1$ (één tijdsstap) te berekenen met de methode waarbij $a_1 = \frac{1}{2}$ en $a_2 = \frac{1}{2}$. (1 pt.)

(e) Is de methode met $a_1 = \frac{1}{2}$ en $a_2 = \frac{1}{2}$ toegepast op (3) stabiel voor de keuze $\Delta t = \frac{1}{2}$? (motiveer uw antwoord) (2 pt.)

2. We onderzoeken **Lagrange interpolatie**. Voor gegeven steunpunten $x_0$, $x_1$, …, $x_n$ met bijbehorende functiewaarden $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, wordt het interpolatiepolynoom $L_n(x)$, gegeven door

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{kn}(x), \text{ met} \\ L_{kn}(x) &= \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}. \end{aligned} \tag{4}$$

**voor vervolg z.o.z.**

(a) Geef het *lineaire interpolatiepolynoom van Lagrange* $L_1(x)$ met steunpunten $x_0$ en $x_1$. (1 pt.)

(b) Geef het *kwadratische interpolatiepolynoom van Lagrange* $L_2(x)$ met steunpunten $x_0$, $x_1$ en $x_2$. (2 pt.)

(c) Bereken $L_n(2)$ en $L_n(3)$ eerst met lineaire interpolatie en dan met kwadratische interpolatie voor de volgende meetwaarden gegeven in tabelvorm:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 3 |
| 1 | 3 | 6 |
| 2 | 4 | 5 |

(2 pt.)

3. Vervolgens willen we de **integraal** $\int_0^1 y(x)dx$ met $y(x) = x^2$ **numeriek benaderen**.

(a) Geef de *Rechthoekregel* $I^R$. Geef ook de bijbehorende *samengestelde integratieregels* $I^R(h)$. Benader de integraal $\int_0^1 y(x)dx$ met behulp van de samengestelde Rechtshoekregel, met $h = 1/4$. (1 pt.)

(b) Herhaal deel (a) met de *Trapeziumregel* ($I^T$ en $I^T(h)$), met $h = 1/4$. (1 pt.)

(c) Stel dat men $\int_0^1 y(x)dx$ benadert, dan is de grootte van de fout van de *samengestelde regels* ($\varepsilon_R$ en $\varepsilon_T$ voor de Rechthoek- en Trapeziumregel, respectievelijk) begrensd door

$$\varepsilon_R \leq \frac{h}{2} \max_{x\in[0,1]} |y'(x)|, \quad \varepsilon_T \leq \frac{h^2}{12} \max_{x\in[0,1]} |y''(x)|. \tag{5}$$

Geef *expliciete* bovengrenzen voor de fout aan met $y(x) = x^2$. Welke methode verdient de voorkeur als het aantal integratiepunten groot is? Motiveer uw voorkeur. (1 pt.)

(d) Gebruik de volgende formule voor de fout van de *Trapeziumregel*

$$\int_0^1 y(x)dx - I^T(h) = c_p h^p$$

en leid met behulp van de Richardson methode de volgende relatie af

$$\frac{I^T(2h) - I^T(4h)}{I^T(h) - I^T(2h)} = 2^p$$

Bereken daarmee de numerieke approximatie orde $p$ voor $h = 1/4$. (1 pt.)

(e) Leid de volgende relatie af

$$\int_0^1 y(x)dx - I^T(h) = \frac{Q(h) - Q(2h)}{2^p - 1}$$

en gebruik deze om een schatting van de fout van de *Trapeziumregel* voor $h = 1/4$ te berekenen. (1 pt.)

**Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:**
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html