TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: D. den Ouden-van der Horst
Reviewer tentamen: C. Vuik

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU/Minor AESB2210)
Donderdag 19 April 2018, 18:30-21:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 10 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten argumenten en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen geven geen punten.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische rekenmachine is toegestaan. Alle andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/20$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Een methode om het beginwaardeprobleem gedefinieerd door $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren is gegeven door

$$\begin{cases} k_1 &= \Delta t\, f\,(t_n, w_n) \\ k_2 &= \Delta t\, f\,(t_n + \Delta t, w_n + k_1) \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2) \end{cases}$$

waarin Δt de tijdstap is en w_n de numerieke oplossing op tijd t_n is.

(a) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van de gegeven methode $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. (3 pt.)

(b) De *versterkingsfactor* van deze methode is gegeven door

$$Q(\lambda \Delta t) = 1 + \lambda \Delta t + \frac{1}{2}\,(\lambda \Delta t)^2\,.$$

Leid deze versterkingsfactor af voor de gegeven methode. (2 pt.)

(c) Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\underline{y}' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A\underline{y} + \underline{f}, \tag{1}$$

met beginvoorwaarden $y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0$.
Voor welke waarde van Δt is de gegeven tijdsintegratie methode *stabiel* voor dit beginwaardeprobleem? ($3\frac{1}{2}$ pt.)

(d) Voer *één stap* uit met de gegeven method met $\Delta t = \frac{1}{2}$ en $t_0 = 0$ voor het beginwaardeprobleem (1) en de gegeven beginvoorwaarden . ($1\frac{1}{2}$ pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -\frac{d^2y(x)}{dx^2} + y(x) = 2e^x, & x \in (0,1], \\ \\ y(0) = 2, & y'(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

We gebruiken een eindige differentiemethode om de oplossing van bovenstaand randwaardeprobleem te benaderen. Laat de gridpunten gegeven worden door $x_j = jh$, met h als stapgrootte. Laat $x_n = nh = 1$.

(a) Geef een *eindige differentieschema* (inclusief afleiding) voor de inwendige punten waarvan de locale afbreekfout van $O(h^2)$ is. (2pt.)

(b) Gebruik een virtueel roosterpunt voor de randvoorwaarde op $x = 1$ en geef een*eindige differentieschema* (inclusief afleiding) waarvan de locale afbreekfout $O(h^2)$ is. (1pt.)

(c) Geef een *lineair stelsel* $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ met *symmetrische matrix* A welke verkregen kan worden na eindige differentie discretisatie met drie (na verwerking van het virtuele gridpunt) onbekenden ($h = 1/3$). (2pt.)

3. We willen de integraal $\int_a^b f(x)dx$ gaan benaderen met een numerieke methode.

(a) We gaan nu een nieuwe integratiemethode afleiden. Stel $P_1(x)$ is het Taylorpolynoom van eerste graad van $f(x)$ rond het steunpunt b. Laat zien dat de *integratieregel* I_P gebaseerd op $P_1(x)$ voor $\int_a^b f(x)dx$ gegeven wordt door

$$I_P = (b-a)f(b) - \frac{1}{2}(a-b)^2 f'(b),$$

en geef een bovengrens voor de bijbehorende *afbreekfout*

$$\int_a^b f(x)dx - I_P.$$

(2pt.)

(b) Geef voor de nieuwe integratiemethode I_P de *gerepeteerde methode* $I(h)$. Laat de gridpunten gegeven worden door $x_j = a + jh$, met h als stapgrootte en $x_n = a + nh = b$.
Benader de integraal voor $f(x) = x^3$, $a = 0$ en $b = 1$ met deze methode met $h = \frac{1}{2}$ en bepaal het *verschil met het exacte antwoord.* (1.5pt.)

(c) Aan welke methode geeft u de *voorkeur*: de methode uit 3b of de gerepeteerde Trapeziumregel? Onderbouw uw voorkeur.
Hint: er mag gebruikt worden dat de afbreekfout van de gerepeteerde Trapeziumregel begrensd wordt door: $\frac{(b-a)h^2}{12}\max_{\xi\in[a,b]}|f''(\xi)|$. (1.5pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html