TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (CTB2400)
Donderdag 5 juli 2018, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 10 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten argumenten en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen geven geen punten.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische rekenmachine is toegestaan. Alle andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Een methode om het beginwaardeprobleem gedefinieerd door $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren is gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + (1-\theta)\Delta t f(t_n, w_n) + \theta \Delta t f(t_{n+1}, w_{n+1}),$$

waarin Δt de tijdstap is, w_n de numerieke oplossing op tijd t_n is en $0 \leq \theta \leq 1$.

(a) De *versterkingsfactor* van deze methode is gegeven door

$$Q(\lambda\Delta t) = \frac{1 + (1-\theta)\lambda\Delta t}{1 - \theta\lambda\Delta t}.$$

Leid deze versterkingsfactor af voor de gegeven methode. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van de gegeven methode in het algemeen $\mathcal{O}(\Delta t)$ is voor de testvergelijking $y' = \lambda y$. Bepaal ook voor welke waarde van θ de methode $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. . ($3\frac{1}{2}$ pt.)
Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$.
Hint: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \mathcal{O}(x^3)$ for $|x| < 1$.

(c) Neem $\theta = \frac{1}{2}$. Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

met beginvoorwaarden $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$.
Is de gegeven tijdsintegratie methode toegepast op dit beginwaardeprobleem *stabiel* voor $\Delta t = 1$? ($3\frac{1}{2}$ pt.)

(d) Voer *één stap* uit met de gegeven methode met $\Delta t = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$ en $t_0 = 0$ voor het beginwaardeprobleem (1) en de gegeven beginvoorwaarden. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We zullen *Lagrange interpolatie* analyseren. Voor gegeven punten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ and hun respectievelijke functie waardes $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$, het interpolerende polynoom $L_n(x)$ is gegeven door

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{kn}(x), \quad \text{met}$$
$$L_{kn}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

(a) *Bepaal* $\hat{L}_2(2)$ (de verstoorde versie van $L_2(2)$) gegeven de volgende *gemeten* waardes:

k	x_k	$\hat{f}(x_k)$
0	1	3
1	3	6
2	4	5

(3 pt.)

(b) Gegeven is dat we weten

$$\left|f(x) - \hat{f}(x)\right| \leq \epsilon,$$
$$|f'''(x)| \leq \delta,$$

en

$$f(x) - L_n(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta(x)),$$

voor $x \in [1, 4]$. Bepaal een *bovengrens* voor de fout $\left|f(2) - \hat{L}_2(2)\right|$. (2 pt.)

3. We willen een wortel van de functie $f(x) = -x^3 + 6x - \frac{23}{8}$ vinden.

(a) We kiezen de *vast-puntiteratie* $p_{n+1} = g(p_n)$, met $g(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{23}{48}$ om een wortel te vinden. *Laat zien* dat een vast punt van $g(x)$ ook een wortel van $f(x)$ is. (1 pt.)

(b) We beginnen de vast-puntiteratie in $p_0 = 1$. *Bereken* p_1, p_2 en p_3 exact tot vier decimalen en *schets* de vast-puntiteratie in een figuur. (2 pt.)

(c) Laat zien dat de gekozen vast-puntiteratie *convergeert* voor alle $p_0 \in [0, 1]$. (2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html