TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (CTB2400)
Dinsdag 12 juli 2022, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 11 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. We beschouwen de volgende methode

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}\Delta t\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1})\right) \tag{1}$$

voor de integratie van het **beginwaardeprobleem** $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$.

(a) Laat zien dat de *versterkingsfactor* wordt gegeven door

$$Q(\lambda\Delta t) = \frac{1 + \frac{1}{2}\lambda\Delta t}{1 - \frac{1}{2}\lambda\Delta t}.$$

($1\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van (1) voor de testvergelijking $y' = \lambda y$ van de vorm

$$\tau_{n+1} = T\Delta t^2 + \mathcal{O}(\Delta t^3),$$

is en *geef* een formule voor T. ($3\frac{1}{2}$ pt.)
Hint: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.
Hint: $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

(c) We beschouwen het volgende *stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen*: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, waarbij geldt:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Laat zien dat de toepassing van (1) op (2) stabiel is voor $\Delta t = 1$. (3 pt.)

(d) De benadering $\mathbf{w}_1$ van de oplossingen van stelsel (2) op tijd $t = 1$ bepaald door bovenstaande methode toe te passen op (2) met $\Delta t = 1$ is door ons berekend als

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Laat zien dat de gegeven waarde voor $\mathbf{w}_1$ correct is. (2 pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. Om $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ te benaderen kan de trapeziumregel $\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ gebruikt worden.

   (a) Geef het *lineaire interpolatiepolynoom* $p_1(x)$ van Lagrange met steunpunten a en b en *leid* met behulp van $p_1(x)$ de trapeziumregel *af*. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

   (b) De fout voor lineaire interpolatie over steunpunten a en b wordt gegeven door

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi(x)), \text{ voor zekere } \xi(x) \in (a,b).$$

   Leid af dat een *bovengrens* van de afbreekfout van de enkelvoudige trapeziumregel over het interval $[a,b]$ gegeven is door

$$\frac{1}{12}(b-a)^3 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|, \tag{3}$$

   gegeven dat de tweede orde afgeleide van f continu is op $[a,b]$. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

   (c) *Benader* $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ met de gerepeteerde trapeziumregel met $h = \frac{1}{4}$. (1 pt.)

   (d) Geef de absolute waarde van de *afbreekfout* van het antwoord gegeven in (c). (1 pt.)

3. We beschouwen we het volgende **randwaardeprobleem**

$$\begin{cases} -y''(x) + (x+1)y(x) = x^3 + x^2 - 2, & 0 < x < 1, \\ \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 1, \end{cases} \tag{4}$$

   met $y' = \frac{dy}{dx}$ en $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

   (a) We willen het randwaardeprobleem (4) met behulp van de eindige differentie methode oplossen. Laat $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$ waarin de stapgrootte Δx constant is. Geef een discretisatie (+ bewijs) met

   - locale afbreekfout van $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$;
   - verwerking van de randvoorwaarden;
   - en een symmetrische discretisatie matrix.

   Gebruik een virtueel gridpunt voor de randvoorwaarde op $x = 0$. (2.5 pt.)

   (b) Gebruik een stapgrootte van $\Delta x = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{f}$ voor de discretisatie uit deel (a) af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel moet 3×3 zijn (drie onbekenden en drie vergelijkingen).

   Opmerking: U hoeft het stelsel **niet** op te lossen. (1 pt.)

   (c) Voor een ander randwaardeprobleem krijgen we na discretisatie de $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met de volgende componenten: $a_{i,i} = \frac{2}{(\Delta x)^2} + 1$ voor $i = 1 \ldots n$, $a_{i-1,i} = \frac{-1}{(\Delta x)^2}$ voor $i = 2 \ldots n$ en $a_{i,i-1} = \frac{-1}{(\Delta x)^2}$ voor $i = 2 \ldots n$. Alle andere componenten zijn gelijk aan nul. Maak gebruik van de Gershgorin-cirkel stelling om een schatting voor de kleinste eigenwaarde $|\lambda|_{\min}$ te berekenen. Concludeer hieruit dat het eindige differentie schema stabiel is. Dat betekent dat $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat en dat er een constante C bestaat zó dat $\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq C$ als $\Delta x \to 0$. (1.5 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://homepage.tudelft.nl/d2b4e/wi3097/tentamen.html