

# Berekening van compressibele stromingen op een staggered, ongestructureerd grid

Ivo Wenneker

27 april, 2000

## 1 Inleiding

Gezien de toegenomen computerkracht en de voortschrijdende numerieke inzichten kan men steeds ingewikkelder stromingsproblemen en steeds complexere geometrieën berekenen. In Figuur 1 worden twee grids getoond: een gestructureerd en een ongestructureerd grid. En uit ervaring is gebleken dat een ongestructureerd grid twee voordelen biedt t.o.v. een gestructureerd grid:

1. Het genereren van een ongestructureerd grid is eenvoudiger.
2. Lokaal verfijnen, d.w.z. je maakt het grid fijn waar het moet en grof waar het mag, is veel eenvoudiger.

Kenmerkend voor compressibele stromingen is dat de optredende snelheden 'groot'<sup>1</sup> zijn. Om de aerodynamica van een Boeing te begrijpen, om maar eens een voorbeeld te geven, is het noodzakelijk de compressibiliteit van de lucht in ogenschouw te nemen. In veel andere gevallen echter kan men stromingen als incompressibel beschouwen, denk maar aan de luchtstroming rondom een auto of een sportvliegtuigje.

Binnen de numerieke stromingsleer worden voor compressibele stromingen, voor zover wij weten, altijd 'colocated' grids gebruikt. Voor incompressibele stromingen daarentegen worden meestal 'staggered' grids gebruikt.

De betekenis van deze woorden zal verderop uitgelegd worden. Het nieuwe in ons onderzoek is dat wij een 'staggered' en ongestructureerd grid willen gebruiken om compressibele stromingen uit te rekenen. In Sectie 2 worden de stromingsvergelijkingen voor compressibele, wrijvingsloze stromingen van een gas besproken. De discretisatie van deze vergelijkingen op een staggered, ongestructureerd grid is het onderwerp van Sectie 3. Numerieke resultaten zullen behandeld worden in Sectie 4.

## 2 De Euler vergelijkingen

De Euler vergelijkingen, die compressibele en wrijvingsloze stromingen beschrijven, zijn:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} \rho = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} (\rho H) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial m^\alpha}{\partial t} + (u^\beta m^\alpha)_{,\beta} = -p_{,\alpha}. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>Voor lucht onder standaardcondities zijn dit snelheden groter dan 300 km/u

De wiskundige formulering voor behoud van massa, vergelijking (1), wordt de continuïteitsvergelijking genoemd. Hierin staan  $\rho$  voor de dichtheid en  $\mathbf{u}$  is de snelheidsvector. Energiebehoud leidt tot (2), waarin  $E$  staat voor de totale energie en  $H$  voor de totale enthalpie. Deze grootheden zijn aan elkaar gerelateerd middels

$$\rho H = \rho E + p, \quad (4)$$

waarin  $p$  de druk voorstelt. De momentum vergelijking (3) is de tweede wet van Newton voor een gas, waarin  $m^\alpha$  een component van de momentum (impuls) vector is. Merk op dat voor deze vergelijking de Einstein sommatie-conventie gebruikt is, dus  $u_{,\beta}^\beta = \nabla \cdot \mathbf{u}$ . De momentum en snelheid zijn aan elkaar gekoppeld via

$$\mathbf{m} = \rho \mathbf{u}. \quad (5)$$

De vergelijking voor een ideaal gas maakt het stelsel van vergelijkingen sluitend:

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[ \rho H - \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right], \quad (6)$$

waarin  $\gamma = 1.4$  voor lucht. Het is niet moeilijk om aan te tonen dat, gegeven de primaire variabelen  $\mathbf{m}$ ,  $\rho H$  en  $\rho$ , alle andere grootheden bekend zijn. Verder dienen, om een concreet probleem volledig te beschrijven, ook begin- en randvoorwaarden gegeven te zijn.

### 3 Discretisatie

Om tot een numerieke oplossing van de Euler vergelijkingen te komen, dienen deze gediscrèteerd te worden. In tegenstelling tot wat gebruikelijk is in de numerieke compressibele stromingsleer gebruiken wij een 'staggered' positionering van de variabelen in het grid. In Sectie 3.1 wordt dit toegelicht. De ruimtelijke discretisatie van de bewegingsvergelijkingen, waarvoor een eindige volume methode gebruikt wordt, staat in Secties 3.1.1 en 3.1.2. De discretisatie van de energie vergelijking wordt, omdat deze vrijwel identiek is aan die van de continuïteitsvergelijking, niet besproken. Verder is, wegens ruimtegebrek, de discretisatie van de toestandsvergelijking niet opgenomen in dit verhaal. Voor de tijdsdiscrèteisatie wordt de impliciete Euler methode gebruikt.

#### 3.1 'Staggered' positionering van de variabelen

In dit verhaal beperken we ons tot 2D ongestructureerde grids bestaande uit driehoeken. In Figuur 2 staat de 'staggered' positionering van de variabelen, vanaf nu kortweg staggered grid genoemd, getekend. In de zwaartepunten van de driehoeken worden de scalaire variabelen (e.g.  $\rho$ ,  $\rho H$  en  $p$ ) gelegd. Op de middens van de driehoeks zijden wordt de momentum component parallel aan de normaal op die driehoeks zijde opgeslagen.

In een colocated grid, vrijwel altijd gebruikt bij het berekenen van compressibele stromingen, worden alle variabelen op dezelfde grid positie gelegd. Meestal kiest men hiervoor de zwaartepunten of de hoekpunten van de driehoeken.

##### 3.1.1 Discretisatie van de continuïteitsvergelijking

Integratie van (1) over het controle volume, waarvoor we driehoek  $i$  zelf kiezen, gaat als volgt, zie Figuur 2:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u} \rho d\Omega &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} \rho d\Omega + \oint_{\partial \Omega_i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \rho d\Gamma \approx \\ &\approx \Omega_i \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \sum_{e=1}^3 u_e \rho_e l_e = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Hierin is  $\rho_i$  de dichtheid in driehoek  $i$ , het oppervlak van driehoek  $i$  is  $\Omega_i$ , de sommatie is over de zijden van de driehoek, de normale snelheid op zijde  $e$  is  $u_e = (\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{n}_e)$  en  $l_e$  is de lengte van deze zijde. Merk op dat  $u_e$  al op de juiste lokatie zit. Alleen om  $\rho_e$  te krijgen moeten we een interpolatie bedenken. Centrale interpolaties geven voor de dichtheid op zijde 1

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j) \quad (8)$$

terwijl een eerste orde upwind interpolatie leidt tot:

$$\rho_1 = \begin{cases} \rho_i & \text{als } u_1 > 0, \text{ d.w.z. een stroming van } i \text{ naar } j, \\ \rho_j & \text{als } u_1 < 0, \text{ d.w.z. een stroming van } j \text{ naar } i. \end{cases} \quad (9)$$

### 3.1.2 Momentum vergelijking

Om een vergelijking voor het normale momentum components  $m_i = (\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{N}_i)$ , met  $\mathbf{N}_i$  de normaal op zijde  $i$ , te krijgen, integreren we over  $\Omega_i$ , waarvoor we de twee driehoeken grenzend aan zijde  $i$  kiezen:

$$\Omega_i \frac{m_i^{n+1} - m_i^n}{\Delta t} + \sum_e u_e (\mathbf{m}_e \cdot \mathbf{N}_i) l_e = -\Omega_i (\nabla p \cdot \mathbf{N}_i). \quad (10)$$

De sommatie is over de zijden  $e = \{k, l, o, j\}$ , zie Figuur 3. Om tot een numerieke benadering voor de convectie term voor zijde  $k$  te komen, merken we allereerst op dat

$$\mathbf{m}_k \cdot \mathbf{N}_i = (m_k \mathbf{N}_k + \tilde{m}_k \mathbf{t}_k) \cdot \mathbf{N}_i, \quad (11)$$

waarin  $m_k$  de normale momentum component en  $\tilde{m}_k$  de tangentiële momentum component is. Met  $\mathbf{t}_k$  de tangentiële vector op zijde  $k$  bestaan er unieke oplossingen voor  $\xi$  voor de uitdrukkingen

$$\mathbf{t}_k = \xi_w \mathbf{N}_w + \xi_v \mathbf{N}_v \quad \mathbf{t}_k = \xi_i \mathbf{N}_i + \xi_j \mathbf{N}_j. \quad (12)$$

Gebruik makend van deze uitdrukkingen definiëren we het eerste orde upwind schema, met een stroming van driehoek 3 naar 1:

$$\tilde{m}_k = \mathbf{m}_k \cdot \mathbf{t}_k = \mathbf{m}_k \cdot (\xi_w \mathbf{N}_w + \xi_v \mathbf{N}_v) \approx \xi_w m_w + \xi_v m_v. \quad (13)$$

Centrale interpolaties resulteren in

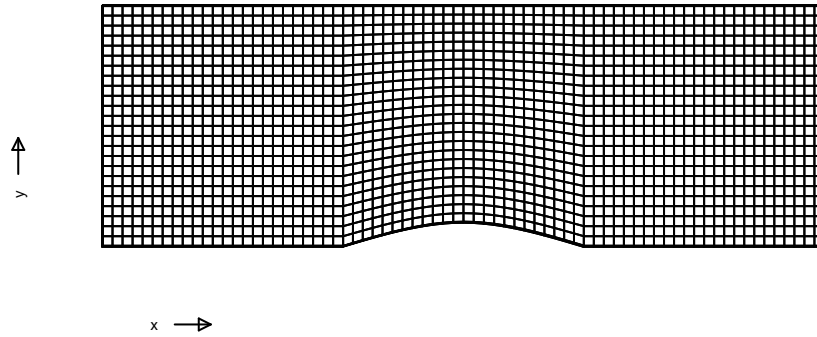
$$\tilde{m}_k \approx \frac{1}{2}(\xi_w m_w + \xi_v m_v + \xi_i m_i + \xi_j m_j). \quad (14)$$

De discretisatie van de drukgradient wordt wegens ruimtegebrek niet behandeld.

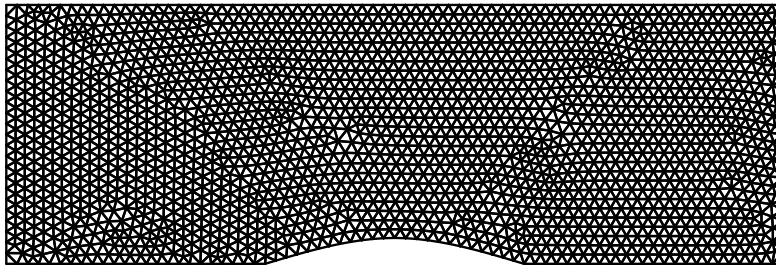
## 4 Numerieke resultaten voor een kanaal met een drempel

De resultaten behaald met de hierboven beschreven aanpak voor een stroming in een kanaal met een drempel waarbij het Mach getal op de instroomrand (de verticale linkerkant) gelijk is genomen aan 0.5 worden hier behandeld. Het gebruikte grid staat in Figuur 1b en voor alle vergelijkingen is een eerste orde upwind interpolatie gebruikt. De berekende Mach contouren staan in Figuur 4. Merk op dat de exacte oplossing symmetrisch is, en dat door de toevoeging van numerieke diffusie deze symmetrie verloren is gegaan. Dit is gebruikelijk voor eerste orde berekeningen.

De berekening is herhaald, met een andere methode, op het gestructureerde grid als gegeven in Figuur 1a. De verdeling van het Mach getal op de boven- en onderwand van het kanaal berekend met de twee methodes staan in Figuur 5. De ongestructureerde methode geeft goede resultaten. Verder is duidelijk dat de ongestructureerde methode meer numerieke diffusie introduceert. De belangrijkste reden hiervoor is dat voor de resultaten behaald op het gestructureerde grid de gridlijnen vrij goed samenvallen met de stroomlijnen, en dat de gebruikte eerste orde upwind interpolatie alleen de hoofdstroomrichting gebruikt.



(a)



(b)

Figure 1: Voorbeelden van een gestructureerd (boven) and ongestructureerd grid (onder) in een kanaal met een drempel.

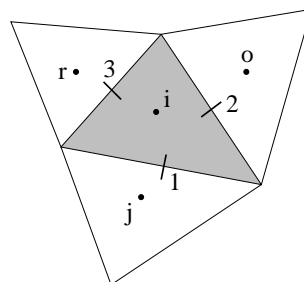


Figure 2: Staggered grid.

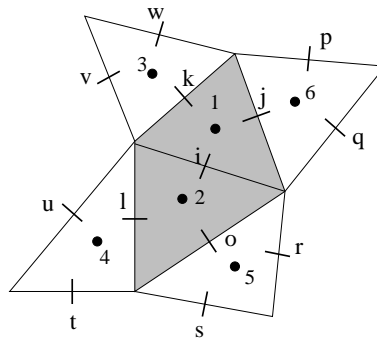


Figure 3: Het controle volume voor de normale momentum component  $m_i$  is aangegeven met grijs.

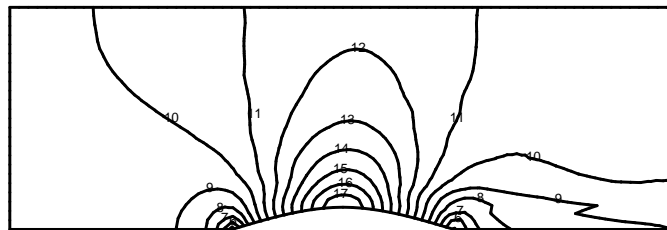


Figure 4: Mach contour plot. Level 10 komt overeen met  $M = 0.5$ , en het verschil tussen de levels bedraagt 0.025

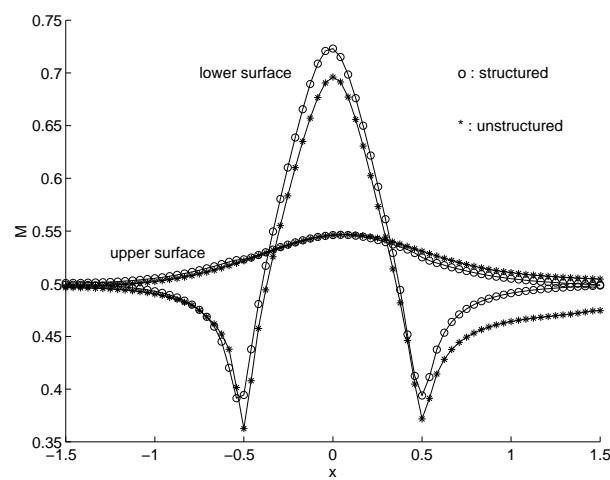


Figure 5: Distributie van het Mach getal op de boven- en onderwand van het kanaal.