

Anwendung eines Mehrgitterverfahrens auf  
partielle Differentialgleichungen für asiatische  
Optionen unter Verwendung einer modernen  
Zeitdiskretisierung

Diplomarbeit

vorgelegt von

Jörg Frisch

angefertigt unter Anleitung von

PD Dr. Cornelis W. Oosterlee

Mathematisches Institut der Universität zu Köln

Köln, Wintersemester 2001/02

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Optionen und ihre Anwendungsbereiche</b>	<b>6</b>
2.1	Futures . . . . .	6
2.2	Standardoptionen . . . . .	10
2.2.1	Die Auszahlungsfunktion einer Option . . . . .	11
2.2.2	Die Hebelwirkung einer Option . . . . .	14
2.3	Ein Kapitalmarktmodell . . . . .	15
2.4	Portfoliostrategien am Kapitalmarkt . . . . .	18
2.4.1	Synthetische Positionen durch Optionen und Aktien . . . . .	18
2.4.2	Portfoliostrategien mit Optionen und Aktien . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Die Bewertung von Optionen mit dem Black-Scholes-Modell</b>	<b>31</b>
3.1	Der theoretische Wert einer Option . . . . .	31
3.2	Die Bewertung von Optionen auf der Grundlage des Binomialmodells . . . . .	33
3.2.1	Die Bewertung mit dem Binomialmodell . . . . .	34
3.3	Die Black-Scholes-Gleichung für europäische Standardoptionen . . . . .	37
3.3.1	Ein kontinuierliches Modell für den Kursverlauf . . . . .	38
3.3.2	Die Black-Scholes-Gleichung . . . . .	40
3.3.3	Die End-Randwertaufgabe für europäische Optionen . . . . .	42
3.4	Die Black-Scholes-Ungleichung für amerikanische Optionen . . . . .	45
3.4.1	Das lineare Komplementaritätsproblem . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Optionen am Kapitalmarkt</b>	<b>53</b>
4.1	Beurteilung einer gehandelten Option . . . . .	53
4.1.1	Die Optionselastizität . . . . .	55
4.2	Strategien mit dem Optionsdelta und ihre Gefahren . . . . .	56
4.2.1	Hedgestrategien mit dem Delta der Option . . . . .	56
4.2.2	Synthetischer Put . . . . .	58
4.2.3	Die Gefahren des Delta Hedgen . . . . .	59
4.2.4	Die Spekulation auf falsch bewertete Optionen . . . . .	61

<b>5</b>	<b>Asiatische Optionen und ihre Bewertung</b>	<b>65</b>
5.1	Diskrete asiatische Optionen . . . . .	67
5.1.1	Die Optionswertentwicklung zwischen den Beobach- tungszeitpunkten . . . . .	68
5.1.2	Die Optionswertentwicklung an den Beobach- tungszeitpunkten . . . . .	68
5.1.3	Die Bewertung diskreter asiatischer Optionen	69
5.2	Kontinuierliche asiatische Optionen . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Numerische Bewertung der Standardoptionen</b>	<b>75</b>
6.1	Die Diskretisierung der Black-Scholes-Gleichung . . .	75
6.1.1	Die Zeitdiskretisierung . . . . .	76
6.1.2	Die Raumdiskretisierung . . . . .	82
6.1.3	Die Matrixgleichung . . . . .	91
6.2	Numerische Lösung der Black-Scholes-Gleichung . . .	93
6.3	Numerische Lösung der Black-Scholes-Ungleichung . .	95
6.3.1	Der Projektions-Gauß-Seidel-Algorithmus . .	96
<b>7</b>	<b>Anwendung eines Mehrgitterverfahrens</b>	<b>99</b>
7.1	Mehrgitter für lineare partielle Differentialgleichungen	99
7.1.1	Anisotrope Probleme . . . . .	104
7.1.2	Ergebnisse für europäische Optionen . . . . .	106
7.2	Mehrgitter für nicht lineare partielle Differentialglei- chungen . . . . .	107
7.2.1	Anwendung des PFAS auf das lineare Kom- plementaritätsproblem . . . . .	109
7.2.2	Ergebnisse für amerikanische Optionen . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Numerische Lösung der partiellen Differentialgleichung und -ungleichung für asiatische Optionen</b>	<b>111</b>
8.1	Asiatische Optionen vom europäischen Typ . . . . .	111
8.1.1	Die Diskretisierung des Konvektionsterms . .	112
8.1.2	Die Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	113
8.1.3	Anwendung des Mehrgitterverfahrens . . . . .	114
8.1.4	Ergebnisse . . . . .	116
8.2	Asiatische Optionen vom amerikanischen Typ . . . .	122
8.2.1	Ergebnisse . . . . .	123
<b>9</b>	<b>Schlussbetrachtung und Ausblick</b>	<b>128</b>

## 1 Einleitung

Die Zeiten, in denen man sein erspartes Geld im Strumpf unter dem Kopfkissen aufbewahrte, sind lange vorbei. Für große Unternehmen und auch für Privatpersonen bietet der Finanzmarkt viele Alternativen, um Geld Gewinn bringend anzulegen und für seine Besitzer arbeiten zu lassen. Besonders in dem letzten Jahrzehnt hat in Deutschland der Handel mit spekulativen Wertpapieren, wie zum Beispiel Aktien, enorm an Bedeutung gewonnen. Jeder hat mindestens einen Bekannten oder Nachbarn, der in den vergangenen Jahren freudig von seinen Spekulationsgewinnen berichten konnte. Dieselben Bekannten und Nachbarn wurden aber leiser als der Trend der Börse sich im letzten Jahr wendete, um die überbewerteten Aktien zu korrigieren. Viele Anleger mussten feststellen, dass nicht ihre "gute Nase" für die Gewinne verantwortlich war, sondern lediglich der positive Börsentrend. Die Möglichkeit hohe Gewinne an der Börse zu erzielen, ist eng verbunden mit dem Risiko große Verluste einzubüßen. Derivative Wertpapiere bieten den Anlegern die Möglichkeit sich gegen Kursschwankungen von Finanztiteln, wie zum Beispiel Aktien, abzusichern.

Eine große Gruppe innerhalb der Derivate sind die Optionen. Sie werden erst seit Anfang der siebziger Jahre gehandelt, besitzen aber mittlerweile eine große Bedeutung am Kapitalmarkt. Diesen Erfolg haben sie unter anderem Black, Scholes und Merton zu verdanken, die mit ihrem Modell für die Bewertung von Standardoptionen die Grundlage geschaffen haben, um viele weitere Optionstypen bewerten zu können. Für ihre Arbeit wurden sie daher 1997 mit dem Nobelpreis für Ökonomie ausgezeichnet. Neben den Standardoptionen, die am Derivatemarkt gehandelt werden, gibt es OTC-Optionen (over the counter), die individuell zwischen dem Käufer und Verkäufer ausgehandelt werden. Diese Optionen werden auch als exotische Optionen bezeichnet. Die asiatischen Optionen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, gehören zu diesen exotischen Optionen. Für ihre Bewertung gibt es eine partielle Differentialgleichung, die sich aus der von Black und Scholes entwickelten Gleichung für die Standardoptionen herleiten lässt.

Während die Black-Scholes-Gleichung neben der Zeitdimension nur eine Raumdimension besitzt handelt es sich bei der Differentialgleichung für asiatische Optionen um eine zweidimensionale partielle Differentialgleichung. Durch die zusätzliche Dimension steigt der Re-

chenaufwand und damit die für die Bewertung benötigte Zeit enorm an. In dieser Arbeit wird ein Verfahren beschrieben, mit dem man schnell eine Approximation für die Lösung der partiellen Differentialgleichung mit geeigneter Genauigkeit erhält.

In Kapitel 2 werden die Grundlagen für europäische Standardoptionen gelegt und ihre Verwendung bei der Konstruktion von Portfolios vorgestellt. Das Modell, mit dem europäische und amerikanische Standardoptionen bewertet werden können, und die daraus resultierende Black-Scholes-Gleichung und -Ungleichung werden in Kapitel 3 dargestellt. Eine Strategie um verkaufte Optionen abzusichern und die Gefahren, die sie beinhaltet, werden in Kapitel 4 beschrieben. Nachdem die Grundlagen für den Umgang mit Standardoptionen in den ersten vier Kapiteln gelegt wurden, werden in Kapitel 5 die asiatischen Optionen und das Modell, mit dem sie bewertet werden, vorgestellt. Da die partielle Differentialgleichung für die asiatischen Optionen aus der Black-Scholes-Gleichung durch Hinzunahme eines weiteren Termes entsteht, wird zuerst die numerische Lösung der Black-Scholes-Gleichung und der Black-Scholes-Ungleichung in Kapitel 6 behandelt. Dabei wird eine flexible Zeitdiskretisierung betrachtet, die es ermöglicht den expliziten und impliziten Anteil des Konvektionsterms zu gewichten. Außerdem werden verschiedene Diskretisierungen bezüglich ihrer Monotonie und Stabilität im Falle einer konvektionsdominanten Differentialgleichung untersucht, da dieser Fall bei der partiellen Differentialgleichung für asiatische Optionen auftritt. Weiterhin wird mit einem Mehrgitteralgorithmus das Lösungsverfahren in Kapitel 7 beschleunigt. In Kapitel 8 werden die gewonnenen Erkenntnisse verwendet, um die partielle Differentialgleichung und Differentialungleichung für asiatische Optionen vom europäischen und amerikanischen Typ zu lösen.

## 2 Optionen und ihre Anwendungsbereiche

Eine sehr junge aber dafür äußerst wichtige Klasse von Finanzinstrumenten sind die derivativen Wertpapiere, die auch kurz Derivate genannt werden. Sie sind eine hervorragende Ergänzung zu den primitiven Wertpapieren auf dem Geld- und Kapitalmarkt. Unter primitiven Wertpapieren versteht man Finanztitel, deren Rendite für ihren Besitzer von ihrem eigenen Wert abhängt. Die sicherlich bekanntesten sind Aktien. Den Gewinn, den sie ihrem Besitzer einbringen, entspricht der Differenz aus ihrem Kaufpreis und ihrem Preis zum Verkaufstermin. Dagegen wird der Wert der Derivate von dem Wert anderer Finanztitel abgeleitet. Es gibt zum Beispiel Derivate auf Aktien, deren Wert steigt, falls der Kurs der Aktie fällt. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit eventuelle Kursverluste auszugleichen. Neben Aktien kommen auch Devisen, Rohstoffe oder andere Finanztitel als Alternativen in Frage. In jüngster Zeit haben sogar Rückversicherungen die Möglichkeiten der Derivate erkannt, um die Risiken und Kosten durch Naturkatastrophen auf viele Personen zu verteilen und dadurch für den Einzelnen zu verringern. Zum Beispiel verkauft eine Schweizer Versicherung seit einigen Jahren sogenannte "Hagel-Bonds". Der Wert dieser "Hagel-Bonds" steigt, wenn in einer genau definierten Region in einem bestimmten Zeitraum kein Hagel fällt, ansonsten sind sie wertlos. Käufer dieser Bonds übernehmen mit dem Kaufpreis einen Teil der entstehenden Kosten, wenn es hagelt, können aber auf einen Gewinn hoffen, wenn die Katastrophe nicht eintritt.

Die Möglichkeiten an Derivaten scheinen fast unbegrenzt. Zur Zeit gibt es über 1200 verschiedene Typen auf dem Finanzmarkt, die in zwei großen Gruppen, den Futures und den Optionen, unterteilt werden.

### 2.1 Futures

Der Ursprung der Futures liegt in dem Handel mit Rohstoffen. Mit ihnen wurden die Preise für ein Geschäft, das in der Zukunft erfolgt, schon vorher vereinbart. So konnten zum Beispiel die Preise für die Getreideernte im Herbst bei der Aussaat im Frühjahr festgelegt werden. Dadurch befreiten sich beide Parteien von dem Einfluss unvorhergesehener Ereignisse, wie zum Beispiel besonders gutes Wetter oder Insektenbefall. Ein ertragreiches Jahr trieb die Preise genauso

wenig in den Keller wie ein ertragsarmes Jahr in die Höhe.

**Definition 2.1 (Future)** *Ein Future ist eine Vereinbarung zwischen zwei Parteien, die zum heutigen Zeitpunkt  $t = 0$  getroffen wird und beide Seiten verpflichtet*

- *einen zugrunde gelegten Basiswert (Underlying)*
- *gegen einem festgelegten Betrag  $K > 0$*
- *an einem Fälligkeitstermin  $t = T$*

*zu tauschen.*

Mit dem Basiswert bezeichnet man den Gegenstand, auf den sich der Future bezieht, der also in der Zukunft gehandelt wird.

Der zukünftige Gewinn bzw. Verlust für die Geschäftsparteien, der sich aus dem vereinbarten Preis  $K$  und dem Wert  $S$  des Basiswertes am Fälligkeitstermin ergibt, ist in Abbildung 1 beziehungsweise in Abbildung 2 dargestellt.

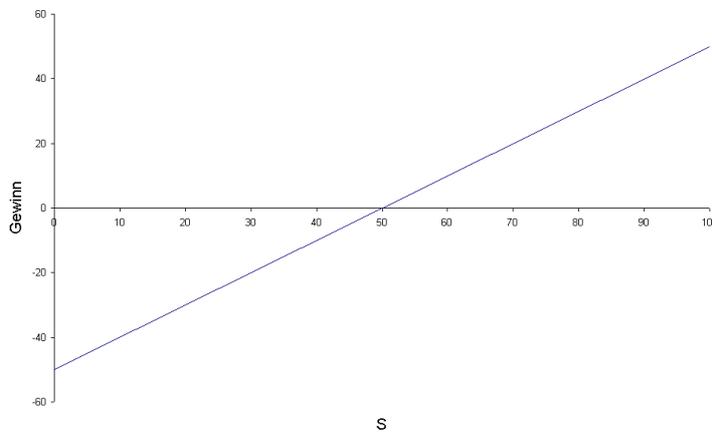


Abbildung 1: Der Käufer des Basiswertes erzielt einen Gewinn, wenn am Fälligkeitstermin des Futures der Marktpreis über dem vereinbarten Preis ( $K = 50 \text{ €}$ ) liegt. Ist der Marktpreis niedriger als der vereinbarte Preis  $K$ , so erleidet er einen Verlust

**Bewertung** Sehr häufig werden Finanzinstrumente auf dem Kapitalmarkt mit Hilfe von Duplikationsportfolios bewertet. Darunter versteht man Kombinationen von Wertpapieren, deren aktueller

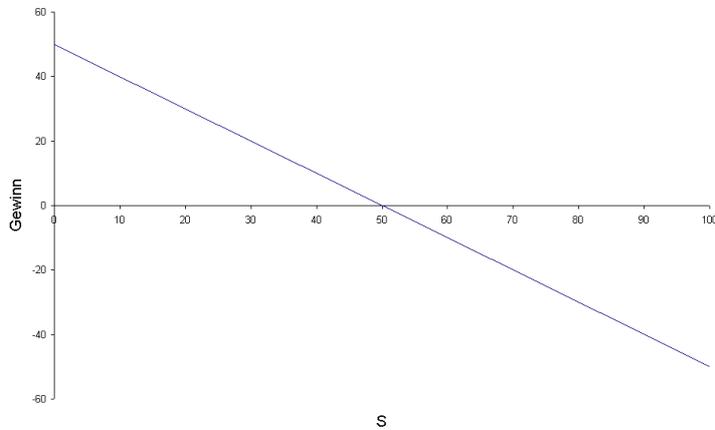


Abbildung 2: Der Verkäufer des Basiswertes erzielt einen Gewinn, wenn am Fälligkeitstermin des Futures der Marktpreis unter dem vereinbarten Preis ( $K = 50 \text{ €}$ ) liegt. Ist der Marktpreis höher als der vereinbarten Preis  $K$ , so erleidet er einen Verlust

Wert zum Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt ist und deren zukünftiger Geldfluss (cash flow) mit dem Geldfluss des zu bewertenden Finanzinstrumentes übereinstimmt. Da die zu erwartenden Zahlungen gleich sind muss auch der aktuelle Preis beider Finanzinstrumente gleich sein.

Mit einem Duplikationsportfolio kann der zukünftige faire Preis für das Underlying eines Futures bestimmt werden. Die Vorgehensweise wird an dem Beispiel einer Aktie erläutert:

Zwei Parteien vereinbaren mit einem Future eine Aktie zu einem Zeitpunkt  $t = T$  für einen Preis  $K$  zu tauschen. Am Zeitpunkt  $T$  gibt der Verkäufer die Aktie mit dem Wert  $S_T$  ab und erhält dafür den Betrag  $K$ ,

$$G(T) = -S(T) + K . \quad (1)$$

Um diesen cash flow zu duplizieren muss man zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Aktie kaufen und den Betrag  $\frac{K}{(1+r)^T}$  zum risikolosen Zins  $r$  bei der Bank anlegen. Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $t = T$  ist in Tabelle 1 angegeben. Der Verkauf dieses Portfolios zum Zeitpunkt  $t = T$  führt zu dem gleichen Betrag, den der Verkäufer der Aktie erhält.

$$\frac{DP(t=0)}{+S(t) - \frac{K}{(1+r)^T}} \quad \Bigg| \quad \frac{DP(t=T)}{+S(T) - K}$$

Tabelle 1: Der Wert des Duplikationsportfolios  $DP(t)$

Der gewählte Preis  $K$  für die Aktie ist gerade dann fair, wenn er zum Zeitpunkt  $t = T$  dem Wert der Aktie entspricht. Das Duplikationsportfolio ist dadurch am Ausübungstermin wertlos,

$$DP(T) = 0. \quad (2)$$

Auch zum Zeitpunkt  $t = 0$  muss das Portfolio wertlos sein, ansonsten könnte man einen risikolosen Gewinn erzielen indem man das Portfolio verkauft bzw. kauft, je nachdem ob sein Wert negativ oder positiv ist. Die Chance einen risikolosen Gewinn zu erzielen ist am realen Markt nur sehr selten und dann auch nur sehr kurz möglich. Daher wird diese Variante, zu einem Gewinn zu kommen, in der folgenden Modellannahme ausgeschlossen (siehe Abschnitt 2.3).

$$DP(0) = S(0) - \frac{K}{(1+r)^T} = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow K = S(0)(1+r)^T \quad (4)$$

Der faire Preis für die Aktie ergibt sich aus ihrem aktuellen Wert und den Zinsen, die bis zum Ausübungszeitpunkt anfallen. Diese Preiserhöhung entspricht den *Haltekosten* für den Verkäufer. Sie sollen seinen Verlust ausgleichen, der dadurch entsteht, dass er die Aktie bis zum Zeitpunkt  $t = T$  behält und das Kapital aus dem Aktiengeschäft nicht an dem Zeitpunkt  $t = 0$  zum risikolosen Zins anlegen kann.

Erzielt der Aktienverkäufer bis zum Zeitpunkt der Geschäftsdurchführung durch den Besitz der Aktie sichere Gewinne, so müssen diese als *Halteerträge* den zukünftigen Preis senken. Solche Gewinne können zum Beispiel Dividendenzahlungen sein.

In einer allgemeinen Darstellung für den fairen Preis  $K$  gilt,

$$\underbrace{K}_{\text{fairerPreis}} = \underbrace{S(0)}_{\text{aktuellerPreis}} + \underbrace{S(0)(1+r)^T}_{\text{Haltekosten}} - \underbrace{\sum_{i=1}^n D(t_i)(1+r)^{(T-t_i)}}_{\text{Halteertraege}}. \quad (5)$$

An den Terminen  $t_1, \dots, t_n$  fallen die Halteerträge  $D(t_1) \dots D(t_n)$  an. Für andere Basiswerte als Aktien kann diese Gleichung beliebig angepasst werden.

Sehr häufig werden am Kapitalmarkt Futures anstelle von Aktien gehandelt. Man kann dadurch den Aktienhandel auf einen Termin

fixieren und so die Transaktionskosten reduzieren. Diese Möglichkeit wird zum Beispiel beim Deltahedgen (siehe Abschnitt 4.2) ausgenutzt. Der Portfoliomanager muss zur Absicherung seines Portfolios ständig Aktien kaufen und verkaufen, wodurch hohe Transaktionskosten entstehen. Handelt er statt dessen mit Futures, so heben sich am Fälligkeitstermin zum Teil die gekauften und verkauften Futures gegenseitig auf und er muss nur den übrig gebliebenen Verpflichtungen nachkommen. Auf diese Weise kann der Investor Transaktionskosten sparen.

## 2.2 Standardoptionen

Auch die Optionen haben eine lange Geschichte hinter sich. Schon im 17. Jahrhundert wurden diese Derivate an der Amsterdamer Börse gehandelt. Da sie jedoch als spekulativ eingesetztes Wertpapier zu sehr viel größeren Gewinnen aber auch Verlusten wie die zugrunde liegende Aktie führen können, wurde der Optionshandel in den folgenden Jahren sehr häufig verboten. Erst seit 1973 werden an der Chicago Board Option Exchange (CBOE) Standardoptionen gehandelt. Der große Erfolg und der rasante Anstieg des Optionshandels ist in Abbildung 3 dargestellt.

**Definition 2.2 (Standardoption)** *Eine Option ist eine Vereinbarung zwischen zwei Parteien, mit der der Käufer der Option heute, im Zeitpunkt  $t = 0$ , das Recht aber nicht die Verpflichtung erwirbt*

- *im Falle einer europäischen Option an einem Fälligkeitstermin  $t = T$ , im Falle einer amerikanischen Option bis zu einem Fälligkeitstermin  $t = T$*
- *einen Basiswert (Underlying)*
- *zu einem festen Preis (Ausübungspreis / Strike)  $K > 0$*
- *zu kaufen (Kaufoption / Call) oder zu verkaufen (Verkaufsoption / Put).*

*Für dieses Recht zahlt der Käufer dem Verkäufer bei Vertragsabschluss im Zeitpunkt  $t = 0$  einen Optionspreis (Optionsprämie). Übt der Optionsinhaber sein Recht nicht aus, so lässt er die Option verfallen.*

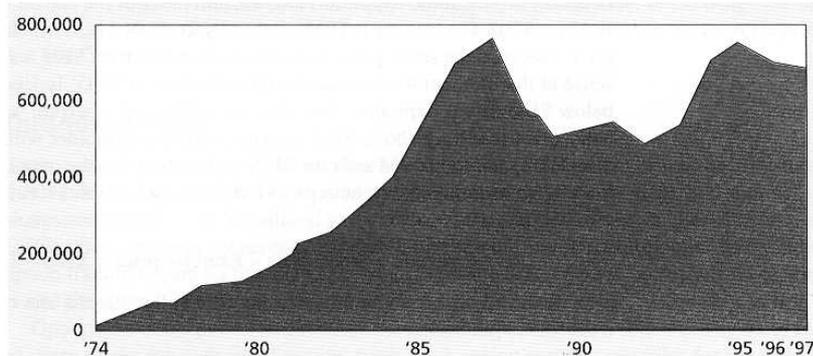


Abbildung 3: Die Durchschnittliche Anzahl gehandelter Optionen von 1974 bis 1997 (aus [5])

Der Unterschied zwischen amerikanischen und europäischen Optionen hat keinen geographischen Hintergrund. Er ist nur in den verschiedenen Zeitpunkten, in denen die Optionen ausgeübt werden dürfen, zu sehen. Während die amerikanischen Optionen zu jedem Zeitpunkt bis zu ihrem Verfallstermin ausgeübt werden dürfen, bietet sich bei europäischen Optionen nur an ihrem Verfallstermin die Möglichkeit über ihre Ausübung zu entscheiden.

In der Finanzwelt bezeichnet man die Person, die die Option auf den Markt bringt als *Writer* der Option. Er legt die Konditionen des Derivates fest. Man sagt natürlich nicht "der Writer verkauft die Option", sondern "er geht in der Option *short*". Der Käufer, der die Option in Zukunft hält, wird als *Holder* bezeichnet. Mit dem Kauf des Derivates geht er *long* in dieser Position.

Wie bei den Derivaten schon angesprochen wurde, gibt es verschiedene Basiswerte, auf die sich Optionen beziehen können. Im Folgenden werden nur Optionen auf Aktien betrachtet.

### 2.2.1 Die Auszahlungsfunktion einer Option

Der Holder einer Option wird diese nur ausüben, wenn es sich für ihn lohnt und er einen Gewinn dadurch erzielt. Dieser Gewinn ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Aktienkurs und dem Ausübungspreis und wird als *innerer Wert* der Option bezeichnet. So besitzt ein Call einen inneren Wert, wenn der Aktienkurs größer ist als der Ausübungspreis. Wird die Aktie unter dem Ausübungspreis

notiert, so würde der Optionsbesitzer durch die Ausübung des Calls einen Verlust erzielen, da er die Aktie am Markt billiger erhalten könnte. Er übt die Option daher nicht aus und sie besitzt keinen inneren Wert. Während der innere Wert einer europäischen Option für ihren Besitzer nur an ihrem Verfallstermin von Bedeutung ist, wird sich der Holder einer amerikanischen Option ständig für den inneren Wert seiner Option interessieren. Er hat schließlich zu jedem Zeitpunkt das Recht seine Option auszuüben.

Die Funktion, die den inneren Wert der Option in Abhängigkeit von dem Ausübungspreis  $K$  und dem aktuellen Aktienkurs  $S$  darstellt, bezeichnet man als die *Auszahlungsfunktion* ( $G(S)$ ) der Option. Sie ist in Tabelle 2 angegeben und für einen Call in Abbildung 4 und für einen Put in Abbildung 5 dargestellt. Besitzt die Option einen inneren Wert, so sagt man, "die Option ist im Geld" (engl.: in the money), besitzt sie keinen inneren Wert, dann heißt es, "die Option ist aus dem Geld" (engl.: out of the money). Den Grenzfall, bei dem der Aktienkurs dem Ausübungspreis entspricht, bezeichnet man mit "die Option ist am Geld" (engl.: at the money).

	$S < K$	$S = K$	$S > K$	$G(S)$
Call	$G(S) = 0$	$G(S) = 0$	$G(S) = S - K$	$\max(S - K, 0)$ $= (S - K)^+$
Put	$G(S) = K - S$	$G(S) = 0$	$G(S) = 0$	$\max(K - S, 0)$ $= (K - S)^+$

Tabelle 2: Die Auszahlungsfunktion  $G(S)$  für einen Call und einen Put

**Exotische Optionen** Die oben beschriebenen Optionen sind standardisierte Derivate, die an organisierten Derivatebörsen gehandelt werden. Zusätzlich besteht die Möglichkeit OTC-Optionengeschäfte (*over-the-counter*) zu tätigen. Es handelt sich dabei um außerbörsliche Geschäfte, die ohne Vermittler zwischen den Geschäftspartnern getätigt werden. Durch diese Möglichkeit können individuelle Optionsverträge ausgehandelt werden, die in ihrer Ausgestaltung fast unbegrenzt sind. Viele dieser Varianten werden unter der Bezeichnung *exotische Optionen* zusammengefasst. Innerhalb der exotischen Optionen gibt es die Klasse der pfadabhängigen Optionen, zu denen die *asiatischen Optionen* gehören. Die Bewertung der asiatischen Optionen wird im weiteren Verlauf der Arbeit besprochen. Pfadabhängige Optionen zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Auszahlungsfunkti-

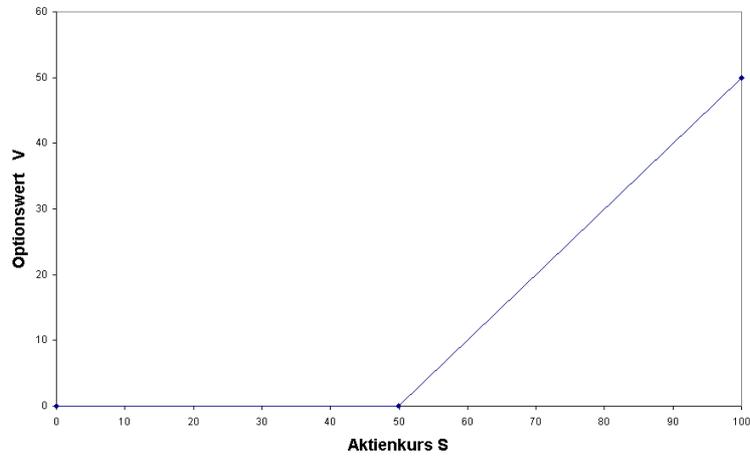


Abbildung 4: Auszahlungsfunktion  $G(S)$  für einen Call mit dem Ausübungspreis  $K = 50 \text{ €}$

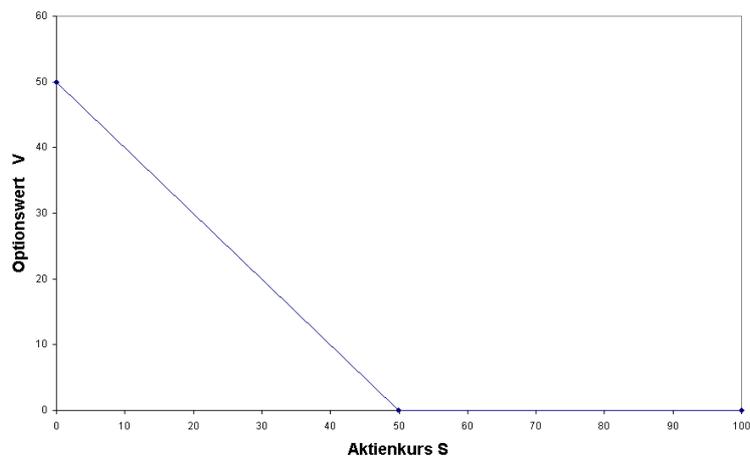


Abbildung 5: Auszahlungsfunktion  $G(S)$  für einen Put mit dem Ausübungspreis  $K = 50 \text{ €}$

on von dem Verlauf des Aktienkurses während der Lebensdauer der Option abhängt. Zum Beispiel hängt bei asiatischen Optionen der Auszahlungswert von dem durchschnittlichen Preis ihres Underlyings während ihrer Lebensdauer ab.

### 2.2.2 Die Hebelwirkung einer Option

Eine nützliche aber auch äußerst tückische Eigenschaft der Optionen liegt in ihrer Hebelwirkung, die sie auf das eingesetzte Kapital in der Form von sehr hohen oder sehr niedrigen Renditen ausübt.

Unter der Rendite  $i$  versteht man den Zinssatz, mit dem der investierte Betrag in dem betrachteten Zeitraum  $[0, T]$  verzinst wird. Eine Aktie, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  bei einem Kurs  $S(0)$  gekauft und zum Zeitpunkt  $t = T$  bei einem Kurs von  $S(T)$  verkauft wird, führt zu der Rendite:

$$i = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)} \quad (6)$$

Die Hebelwirkung, die auch *Leverageeffekt* genannt wird, lässt sich deutlich an einem Beispiel erklären, wenn man die Rendite einer Aktie und einer Option vergleicht:

**Beispiel 2.1** *Der Kurs der IBM Aktie liegt zur Zeit bei  $S(0) = 100$  €. Ein Call auf diese Option mit dem Ausübungszeitpunkt in  $T = 60$  Tagen und einem Ausübungspreis von  $K = 100$  € kostet  $V^C(0) = 10$  €. Tabelle 3 und Abbildung 6 zeigen die Wertentwicklung und die Renditeentwicklung beider Finanztitel in Abhängigkeit von dem Aktienkurs am Ausübungszeitpunkt.*

Aktienkurs	95	100	105	110	115	120
Kursgewinn (€)	-5	0	5	10	15	20
Rendite (Aktie)	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
Optionsgewinn (€)	-10	-10	-5	0	5	10
Rendite (Optionen)	-100%	-100%	-50%	0%	50%	100%

Tabelle 3: Die Rendite der Aktie und der Option bei Kursänderungen

Der Preis für die Option ist wesentlich niedriger als der für die zugehörige Aktie, während ihre betraglichen Wertänderungen gleich sind, falls die Option im Geld ist. Ein Call kann also zu demselben Gewinn führen wie die zugrunde liegende Aktie mit bedeutend weniger Kapitaleinsatz. Dadurch ist die Rendite der Option wesentlich höher als die der Aktie. Befindet sich die Option aus dem Geld oder am Geld, so ist sie wertlos. Demnach ergeben negative oder gar keine Kursänderungen der Aktie eine 100% negative Rendite der Option. Der Hebeleffekt kann sich in beide Richtungen auswirken und ermöglicht daher hohe Gewinne aber auch die enormen Verluste. Um

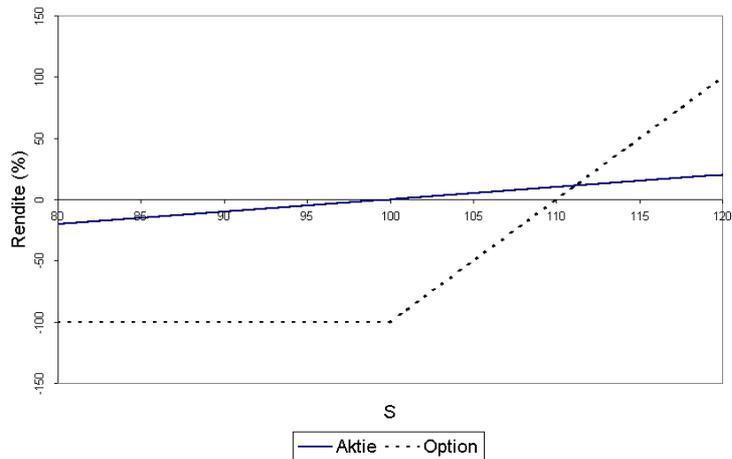


Abbildung 6: Die Rendite einer Aktie und eines Calls auf diese Aktie, in Abhängigkeit des Aktienkurses

einen Investor vor den Gefahren der Hebelwirkung einer Option zu schützen, dürfen sich nur Händler mit Erfahrungen im Börsentermingeschäft am Optionsgeschäft beteiligen.



Abbildung 7: Optionen können mit wenig Einsatz große Wirkungen erzielen (aus [24])

### 2.3 Ein Kapitalmarktmodell

Da der Finanzmarkt äußerst komplex ist greift man, wie in den Naturwissenschaften, auf geeignete Modelle zurück, die diesen Markt vereinfacht aber prägnant durch entsprechende Annahmen darstel-

len. Diese Modelle stellen die Grundlage für die Finanzmathematiker dar, die immer wieder neue Optionstypen bewerten müssen. Im Folgenden wird mit einem allgemein anerkannten Modell gearbeitet, dem *vollkommenen Kapitalmarkt*. Dieser basiert unter anderem auf den Marktannahmen (M1) bis (M5). Da nur diese Annahmen für den weiteren Verlauf der Arbeit von Bedeutung sind, werden die übrigen Voraussetzungen hier vernachlässigt<sup>1</sup>.

(M1) *Geld kann in beliebiger Menge zu einem risikolosen Zinssatz  $r$  angelegt und auch geliehen werden.*

Für geliehenes Geld wird also nicht wie im realen Leben ein höherer Zinssatz verlangt, der Wunschtraum für jeden Schuldner.

(M2) *Wertpapiere können zu jedem Zeitpunkt und in jeder Menge gekauft und verkauft werden.*

Durch diese Annahme ist es möglich Anlagestrategien beliebig zu planen.

(M3) *Leerverkäufe von Wertpapieren sind erlaubt.*

Durch diesen Punkt haben die Marktteilnehmer das Recht Wertpapiere, die sie nicht besitzen, zu verkaufen. Man kann sich vorstellen, dass ein Aktionär sich von einem Freund eine Aktie leiht, um diese an eine dritte Person zu verkaufen. Natürlich will der Freund die Aktie irgendwann wieder zurück bekommen. Der Aktionär hat Pech gehabt wenn der Kurs der Aktie in der Zeit gestiegen ist. Dann muss er das Wertpapier zuerst teuer einkaufen, um seiner Verpflichtung nachkommen zu können. Ist der Wert der Aktie gefallen, so war das Glück auf seiner Seite.

(M4) *Es fallen keine Steuern und Transaktionskosten bei dem Handel von Wertpapieren an.*

Mit dieser Annahme soll vermieden werden, dass die Rechnungen unnötig kompliziert werden.

(M5) *Arbitragegewinne sind nicht möglich.*

Arbitrage beschreibt die Möglichkeit einen sofortigen risikolosen Gewinn<sup>2</sup> erzielen zu können. Eine Möglichkeit dafür besteht zum Beispiel, wenn auf zwei verschiedenen Märkten ein Objekt (z.B. Aktie) zu unterschiedlichen Preisen gehandelt wird. Der raffinierte Investor kauft das Objekt zum günstigeren Preis auf

---

<sup>1</sup>Eine genauere Beschreibung kann zum Beispiel in [5] nachgelesen werden

<sup>2</sup>Gewinne in der Zukunft können durch Abzinsung zu sofortigen Gewinnen übergeführt werden

dem einen Markt und verkauft dasselbe Objekt gleichzeitig zu dem höheren Preis auf dem anderen Markt. Die Preisdifferenz verbucht er als Gewinn.

Diese Einschränkung ist bei genauer Betrachtung äußerst realistisch. Könnten auf dem Markt Arbitragegewinne erzielt werden, würde diese Möglichkeit natürlich von allen Marktteilnehmern sofort ausgenutzt werden, wodurch sich die Preise sehr schnell angleichen würden und die Modellannahme erfüllt wäre.

Große Finanzinstitute beschäftigen Spezialisten, die sogenannten Arbitrageure, die am Markt nach Arbitragemöglichkeiten suchen, um diese in der kurzen Zeit, in der sie existieren, ausnutzen zu können.

Die No-Arbitrage-Annahme übernimmt in den meisten Modellen eine zentrale Rolle bei Beweisen und Herleitungen.

In dem hier betrachteten Modell wird der Markt so eingeschränkt, dass nur Aktien beziehungsweise Optionen gekauft und verkauft werden können und Kapital zum risikolosen Zins bei einer Bank geliehen oder angelegt werden kann.

Da Aktien weitläufig bekannt sind wird nur kurz auf ihre Bedeutung eingegangen und ein paar für den weiteren Verlauf wichtige Eigenschaften angesprochen.

Mit *Aktien* kann man Anteile an einem Unternehmen kaufen. Der Preis einer Aktie wird zum Einen durch den Wert des Unternehmens und zum Anderen durch die Erwartungen in das Unternehmen bestimmt. Die Erwartungen spiegeln sich in dem Angebot und der Nachfrage wieder. Durch diese Faktoren ist die zukünftige Wertentwicklung einer Aktie unsicher.

Da eine Aktie eine unsichere Geldanlage ist, erfährt man die genaue Rendite dieser Geldanlage erst an ihrem Verkaufstermin. Für die zukünftige Entwicklung der Rendite einer Aktie kann man nur Erwartungen besitzen. Man spricht daher von der *erwarteten Rendite* einer Aktie, die in der Regel mit  $\mu$  bezeichnet wird. Der eigentliche Wertzuwachs der Aktie liegt einmal etwas darüber und ein anderes Mal etwas darunter. Das Ausmaß, in dem die Wertentwicklung der Aktie von ihrem Erwartungswert abweichen kann, wird durch ihre *Volatilität* bestimmt.

Prinzipiell gilt für Geldanlagen, dass mit dem Erwartungswert der

Rendite auch die Unsicherheit, dass diese erzielt wird, in Form der Volatilität steigt. Dementsprechend besitzt die *risikolose Geldanlage* die niedrigste Rendite, da diese garantiert ist und die Volatilität  $\sigma = 0$  besitzt.

Ein Anleger, der einen größeren Betrag  $B$  zur Verfügung hat, wird diesen in der Regel nicht nur in eine einzige Alternative anlegen. Selbst in dem hier besprochenen *kleinen Finanzmarkt* hat er die Auswahl zwischen verschiedenen Aktien und Optionen, um sie miteinander zu kombinieren. Die Kombination von verschiedenen Anlagealternativen nennt man ein *Portfolio*.

Der Wert eines Portfolios kann als die Summe der einzelnen Finanztitel dargestellt werden. Dabei sind die Anteile, die dem Portfoliobesitzer zur Verfügung stehen, die Summanden und die Anteile, die ihm nicht zur Verfügung stehen, die Minuenden. Für den Wert eines Portfolios, das aus einer verkauften Option mit dem Wert  $V$  und einem von der Bank geliehenem Betrag  $B$  besteht, gilt:

$$P = -V + B \quad (7)$$

Für ein Portfolio, das aus einer gekauften Aktie mit dem Wert  $S$  und einem bei der Bank angelegten Betrag  $B$  besteht, schreibt man:

$$P = +S - B \quad (8)$$

## 2.4 Portfoliostrategien am Kapitalmarkt

Optionen finden am Markt zwei kontroverse Einsatzbereiche. Zum einen werden sie verwendet, um Portfolios gegen Verluste abzusichern, zum anderen können sie als hoch spekulatives Finanzinstrument eingesetzt werden. Diese Möglichkeiten ergeben sich aus der engen Verbindung mit dem Wert ihres Underlyings.

### 2.4.1 Synthetische Positionen durch Optionen und Aktien

Die betragliche Wertänderung einer Aktie entspricht oberhalb des Ausübungspreises der eines Calls und unterhalb des Ausübungspreises der eines Puts. Durch diesen Zusammenhang und die Möglichkeit Wertpapiere beliebig zu kaufen und zu verkaufen ist es möglich, die einzelnen Positionen synthetisch aus den anderen zu konstruieren. Zur Vereinfachung werden die Positionen mit (U,O) bezeichnet, wobei U für die Steigung der Auszahlungsfunktion unterhalb des Ausübungspreises steht und O für die Steigung oberhalb. Mit short und

long wird die Situation beschrieben, in der ein Finanzinstrument verkauft beziehungsweise gekauft wird. Damit schreibt man für einen Call long  $(0,1)$ , Call short  $(0,-1)$ , Put long  $(-1,0)$ , Put short  $(1,0)$ , Aktie long  $(1,1)$ , Aktie short  $(-1,-1)$ . Die Konstruktion synthetischer Positionen ist in Tabelle 4 dargestellt.

synthetische Position	Konstruktion
Aktie long $(1,1)$	Call long + Put short $(0,1)+(1,0)$
Aktie short $(-1,-1)$	Call short + Put long $(0,-1)+(-1,0)$
Call long $(0,1)$	Aktie long + Put long $(1,1)+(-1,0)$
Call short $(0,-1)$	Aktie short + Put short $(-1,-1)+(1,0)$
Put long $(-1,0)$	Aktie short + Call long $(-1,-1)+(0,1)$
Put short $(1,0)$	Aktie long + Call short $(1,1)+(0,-1)$

Tabelle 4: Synthetische Positionen aus Aktien und Optionen

Mit synthetischen Positionen hat man die Möglichkeit Finanztitel, die nicht erhältlich sind, zu duplizieren. Dies ist zum Beispiel bei Optionen mit einer sehr langen Laufzeit der Fall (siehe Abschnitt 4.2.2). Außerdem kann man Optionen und Aktien so kombinieren, dass man ein Portfolio mit einer gewünschten Auszahlungsfunktion erhält. Einige solcher Optionsstrategien werden im Folgenden dargestellt.

#### 2.4.2 Portfoliostrategien mit Optionen und Aktien

Im Folgenden werden einige grundlegende und beliebte Handelstrategien mit Optionen und Aktien vorgestellt. Um umfangreichere Informationen zu erhalten kann man zum Beispiel in [5] oder [7] nachlesen.

Die Auszahlungswerte der jeweiligen Portfolios an ihren Ausübungszeitpunkten lassen sich relativ leicht mit den Auszahlungsfunktionen der einzelnen Finanzinstrumente herleiten. Um den Profit der jeweiligen Strategie zu bestimmen, muss ihr Ausübungswert mit ihrem Kaufwert korrigiert werden. Dieser beinhaltet die Gewinne aus dem Verkauf und die Kosten aus dem Kauf der einzelnen Finanzinstrumente. Die Verzinsung wird zur Vereinfachung vernachlässigt.

In den folgenden Strategien beziehen sich die Optionen immer auf die gehandelte Aktie.

**Hedgen** Durch den Zusammenhang von Aktienkurs- und Optionswertentwicklung ist es möglich diese Finanzinstrumente so miteinander zu kombinieren, dass die Verluste des Portfolios beschränkt bleiben. Mit dieser Absicherung reduziert sich natürlich die Höhe des Gewinnes.

**Protective Put** Ein Investor, der in Aktien investieren möchte aber nicht bereit ist zu große Kursverluste durch einen Kursrückgang zu akzeptieren, kann jede Aktie durch einen Put absichern. Der Put garantiert den Mindestverkaufspreis der Aktie. Dadurch sind die möglichen Verluste des Portfolios beschränkt, jedoch ein Gewinn durch einen Kursanstieg möglich. Für die Absicherung bezahlt der Investor die Optionsprämie. Der Auszahlungswert dieser Strategie ist in Tabelle 5 angegeben. Die Auszahlungsfunktionen der einzelnen Portfolioelemente sind in Abbildung 8 und der Profit der Strategie ist in Abbildung 9 dargestellt.

	$S \leq K$	$S > K$
Aktie long	S	S
Put long	K-S	0
= Portfolio	K	S

Tabelle 5: Auszahlungswert: Protective Put

**Bemerkung 2.1** *Eine andere Möglichkeit für den Investor sich gegen zu große Kursverluste abzusichern liegt darin, nach einer Stopp-Loss-Strategie zu verfahren. Dazu müsste er seine Aktien verkaufen, sobald ihr Kurs eine fest gewählte Schranke unterschreitet. Der Investor nimmt sich natürlich dabei die Chance von einem anschließenden Kursanstieg zu profitieren. Ein Neukauf der Aktie würde wieder Transaktionskosten verursachen, so dass es sich nicht lohnt diese Schranke als Verkaufs- und Kauflimit zu benutzen, je nachdem in welche Richtung sich der Kurs der Aktie bewegt.*

**Covered Call** Ein Covered Call besteht aus dem Kauf einer Aktie und dem gleichzeitigen Verkauf eines Calls auf diese Aktie. Durch

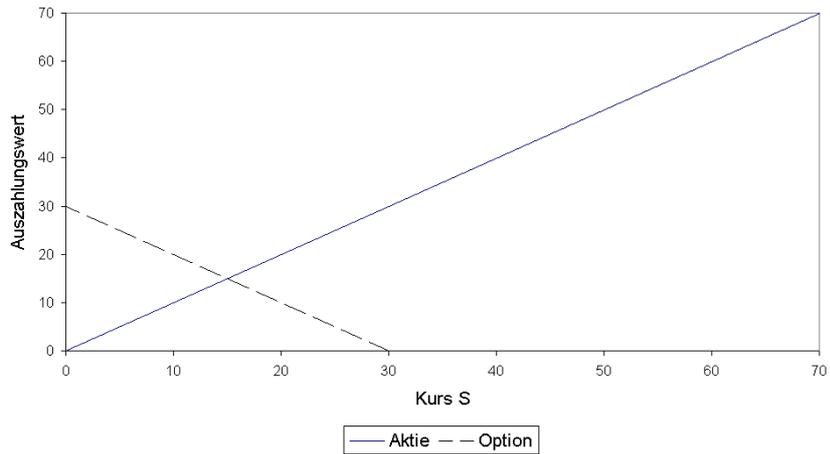


Abbildung 8: Die Auszahlungsfunktion einer Aktie und eines Puts auf diese Aktie mit dem Ausübungspreis  $K = 30 \text{ €}$

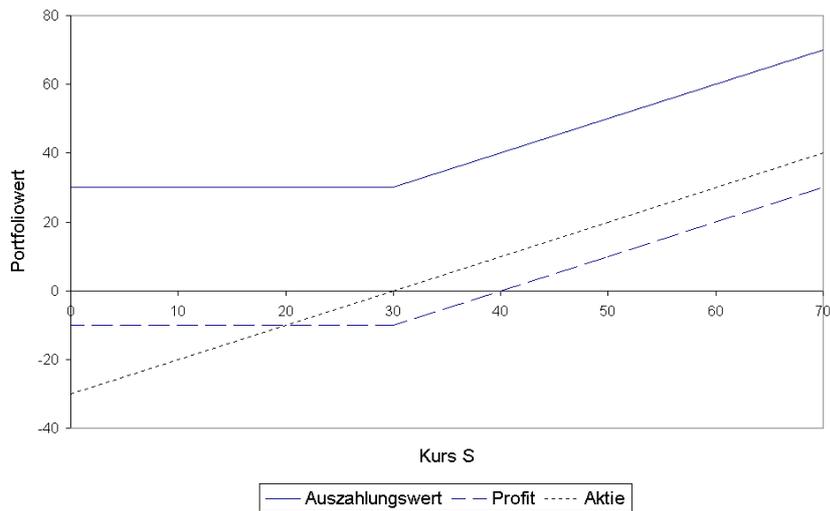


Abbildung 9: Der Auszahlungswert und der Profit des Protective-Put-Portfolios

das Geschäft erhält der Investor die Optionsprämie als sicheren Gewinn. Dafür ist die Obergrenze bei diesem Portfolio durch den Ausübungspreis der Option bestimmt. Die Kursgewinne und die Verpflichtungen durch die Option gleichen sich aus, falls der Aktienkurs Werte annimmt, die größer sind als der Strikepreis der Option. Diese Strategie eignet sich besonders dann, wenn ein Aktionär in jedem Fall seine Aktien verkaufen will, falls der Kurs eine bestimmte Schranke überschreitet. So erhält er einen zusätzlichen Bonus. Der Auszahlungswert dieser Strategie ist in Tabelle 6 angegeben. Die Auszahlungsfunktionen der einzelnen Portfolioelemente sind in Abbildung 10 und der Profit der Strategie ist in Abbildung 11 dargestellt.

	$S \leq K$	$S > K$
Aktie long	S	S
Call short	-0	-(S-K)
= Portfolio	S	K

Tabelle 6: Auszahlungswert: Covered Call

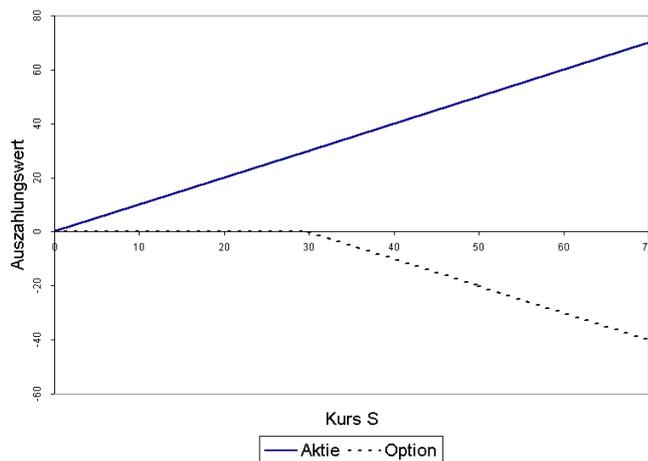


Abbildung 10: Die Auszahlungsfunktion einer Aktie und eines verkauften Calls auf diese Aktie mit dem Ausübungspreis  $K = 30 \text{ €}$

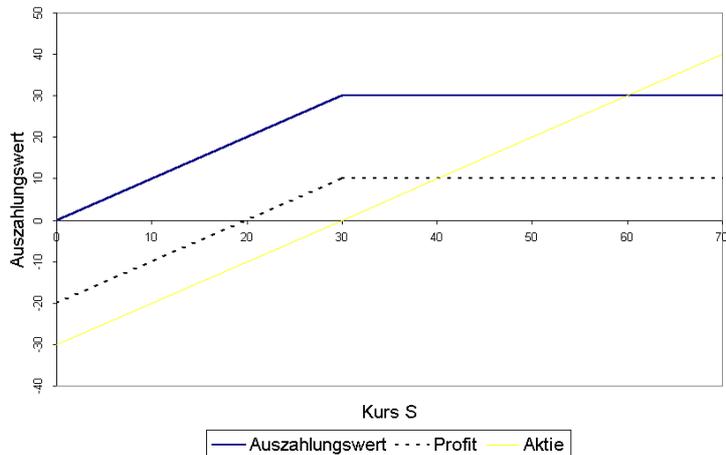


Abbildung 11: Der Auszahlungswert und der Profit des Covered-Call-Portfolios

**Collar** Ein Collar entsteht durch die Kombination der beiden oben beschriebenen Strategien. Man erhält ein Portfolio, das in gleichen Anteilen aus gekauften Aktien, Putoptionen und verkauften Calloptionen besteht. Durch die Derivate werden eine obere und untere Schranke festgelegt, zwischen denen der Investor mit den Aktien spekuliert. Bei einem *Zero-Cost-Collar* werden die Optionen und damit die Schranken so gewählt, dass die Kosten, die durch den Kauf der Putoptionen entstehen genauso hoch sind wie der Gewinn aus dem Verkauf der Calloptionen. Die Eingrenzung des Spekulationsbereiches ist damit kostenlos.

Diese Optionsstrategie eignet sich für Investoren, die einen konkreten Gewinn anstreben, aber nicht bereit sind einen Verlust unter einer bestimmten Grenze einzugehen. Der Auszahlungswert dieser Strategie ist in Tabelle 7 dargestellt.

	$S \leq K_1$	$K_1 < S < K_2$	$S \geq K_2$
Aktie long	$S$	$S$	$S$
Put long	$K_1 - S$	$0$	$0$
Call short	$-0$	$-0$	$-(S - K_2)$
= Portfolio	$K_1$	$S$	$K_2$

Tabelle 7: Auszahlungswert: Collar

**Beispiel 2.2** Eine junge Familie besitzt 170000 € und möchte sich für das Geld ein Haus kaufen. Nach langem Suchen sind zwei Ob-

jekte übrig geblieben. Ein Haus mit Garten für 180000 € und ein Haus ohne Garten für 160000 €. In ihrer Situation ist ein Collar die optimale Strategie. Sie investieren ihre 170000 € in Aktien, z.B. in 1000 IBM-Aktien für 170 € pro Aktie. Den Bereich, in dem sie spekulieren wollen, grenzen sie durch den Kauf von 1000 Putoptionen mit dem Ausübungspreis von  $K_1 = 160$  € und dem Verkauf von 1000 Calloptionen mit dem Strikepreis  $K_2 = 180$  € ab. Falls die Preise für die Call- und Putoptionen gleich sind, kompensieren sich die Kosten und Gewinne aus dem Optionshandel. Die Strategie bietet der jungen Familie die Möglichkeit ihr Traumhaus zu bekommen ohne die Chance auf ein Eigenheim zu verspielen.

**Spekulation** Optionen eignen sich aus zwei Gründen hervorragend zur Spekulation. Zum Einen ist ihr Wert unmittelbar mit dem Kurs ihrer Aktie verbunden, wodurch sie genauso wie die Aktie zum Spekulieren eingesetzt werden können. Rechnet ein Investor mit einem Kursanstieg, so kann er Calloptionen anstelle von Aktien kaufen. Erwartet er einen Kursrückgang, so kann der Investor Putoption kaufen anstatt Aktien zu verkaufen. Zum Anderen bieten die Optionen durch ihre unterschiedlichen Auszahlungsfunktionen, die jeweils von ihrem Typ und ihrem Ausübungspreis abhängen, viele Möglichkeiten zur Kombination. So können zum Beispiel Portfolios konstruiert werden, die auf bestimmte Volatilitäten der Aktien spekulieren.

**Spekulation und Vermögenssicherung mit dem Hebeleffekt** Für den Investor, der einen festen Betrag zur Verfügung hat und damit auf steigende Aktienkurse spekulieren möchte, bieten sich zwei interessante Möglichkeiten durch den Leverageeffekt der Optionen. Ist er sich seiner Erwartung absolut sicher, dann kann er sein ganzes Kapital für den Kauf von Calloptionen verwenden und durch den Hebeleffekt eine wesentlich höhere Rendite erzielen als mit einem reinen Aktienportfolio. Zweifelt er jedoch an seinen Informationen und möchte nicht riskieren, sein ganzes Vermögen zu verlieren, dann konstruiert er sich ein Portfolio aus Calloptionen und einer risikolosen Anlage. Die Anzahl der Optionen wird dabei genauso groß gewählt wie die Anzahl der Aktien, die er für den gesamten Betrag kaufen könnte.

**Beispiel 2.3** : Die IBM Aktie steht bei einem Kurs von  $S_0 = 100$  €. Eine europäische Calloption auf diese Aktie mit dem Ausübungs-

zeitpunkt in  $T = 1$  Jahr und einem Ausübungspreis von  $K = 100$  € kostet heute  $V^C(0) = 10$  €. Innerhalb der Laufzeit werden keine Dividenden ausgeschüttet. Der risikolose Zinssatz beträgt  $r = 3\%$ . Für den Investor, der 10000 € anlegen möchte bieten sich drei interessante Portfoliostrategien an:

- Portfolio A: 100 IBM Aktien
- Portfolio B: 100 Call Optionen + risikolose Anlage: 9000 €
- Portfolio C: 1000 Call Optionen

Der Auszahlungswert der drei Strategien ist in Tabelle 8 dargestellt.

Aktienkurs	90	95	100	105	110	115	120
Portfolio A	9000	9500	10000	10500	11000	11500	12000
Rendite (A)	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
Portfolio B	9270	9270	9270	9770	10270	10770	11270
Rendite (B)	-7.3%	-7.3%	-7.3%	-2.3%	2.7%	7.7%	12.7%
Portfolio C	0	0	0	5000	10000	15000	20000
Rendite (C)	-100%	-100%	-100%	-50%	0%	50%	100%

Tabelle 8: Die Auszahlungswerte der drei Portfolios A, B, und C in Abhängigkeit vom Aktienkurs

Bei der Strategie B wird mit Calloptionen und einer risikolosen Anlage ein Portfolio konstruiert, dessen Rendite zwar mit dem Aktienkurs steigt aber trotzdem einen sicheren Mindestwert garantiert. Die Sicherungsstrategie beruht auf der Hebelwirkung der Optionen. Die 100 Calloptionen führen zu dem gleichen Auszahlungswert wie die 100 Aktien in Portfolio A, falls der Kurs der Aktie gestiegen ist. Da die Optionen aber viel günstiger sind als die Aktien bleibt ein Betrag übrig, der risikolos angelegt wird und den Mindestwert des Portfolios sichert. Durch die Prämie, die bei dem Kauf der Optionen gezahlt wurde, liegt die Rendite des Portfolios jedoch etwas unter der des Aktienportfolios.

Die Hebelwirkung wird in Portfolio C zur reinen Spekulation verwendet. Mit dem gesamten zur Verfügung stehenden Kapital können wesentlich mehr Optionen als Aktien gekauft werden, in unserem Beispiel 10 mal so viele. Dadurch ist die Steigung der Rendite von Portfolio C um das 10-fache größer als die von Portfolio A, falls die Optionen im Geld sind. Ansonsten ist das Optionsportfolio wertlos, während nach Strategie A "nur" die Kursverluste verbucht werden. Das Portfolio C kann also zu sehr hohen Gewinnen, aber auch zu enormen Verlusten führen.

**Straddle** Ein Straddle entsteht durch den Kauf eines Calls und eines Puts auf dieselbe Aktie mit demselben Ausübungspreis und Ausübungszeitpunkt. Diese Optionsstrategie ist besonders dann sinnvoll, wenn der Investor mit starken Kursschwankungen rechnet aber nicht weiß in welche Richtung diese gehen werden. Im schlechtesten Fall bleibt der Aktienkurs konstant, dann ist sein Verlust durch die Prämien der beiden Optionen gegeben. Der Auszahlungswert dieser Strategie ist in Tabelle 9 und ihr Profit in Abbildung 12 dargestellt.

	$S < K$	$S > K$
Call long	0	$S - K$
Put long	$K - S$	0
= Portfolio	$K - S$	$S - K$

Tabelle 9: Auszahlungswert: Straddle

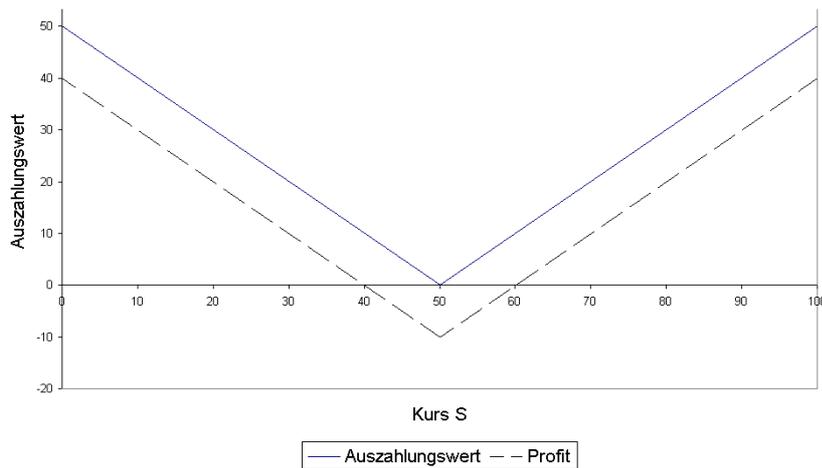


Abbildung 12: Der Auszahlungswert und der Profit des Straddle-Portfolios

**Bemerkung 2.2** *Durch den Verkauf dieses Portfolios verhalten sich die Gewinnaussichten des Investors genau umgekehrt. Er erzielt einen Gewinn, wenn sich der Aktienkurs nur minimal ändert und einen Verlust bei großen Kursschwankungen. Da die Höhe des Verlustes bei dieser Strategie unbeschränkt ist sollte er besser die Strategie Butterfly-Spread (s.u.) verwenden oder durch einen Strangle (s.u.) den Bereich der Gewinnmöglichkeiten ausweiten.*

**Strangle** Bei einem Strangle kauft (verkauft) der Investor einen Call und einen Put auf dieselbe Aktie mit demselben Ausübungs-

zeitpunkt. Der Ausübungspreis des Calls wird jedoch größer gewählt als der des Puts. Bei dieser Strategie wird der Bereich, in denen der Call bzw. der Put auf Kursänderungen reagiert, auseinander gezogen. Der Auszahlungswert dieser Strategie ist in Tabelle 10 und ihr Profit in Abbildung 13 dargestellt.

	$S \leq K_1$	$K_1 < S < K_2$	$S \geq K_2$
Call long	0	0	$S - K_2$
Put long	$K_1 - S$	0	0
= Portfolio	$K_1 - S$	0	$S - K_2$

Tabelle 10: Auszahlungswert: Strangle

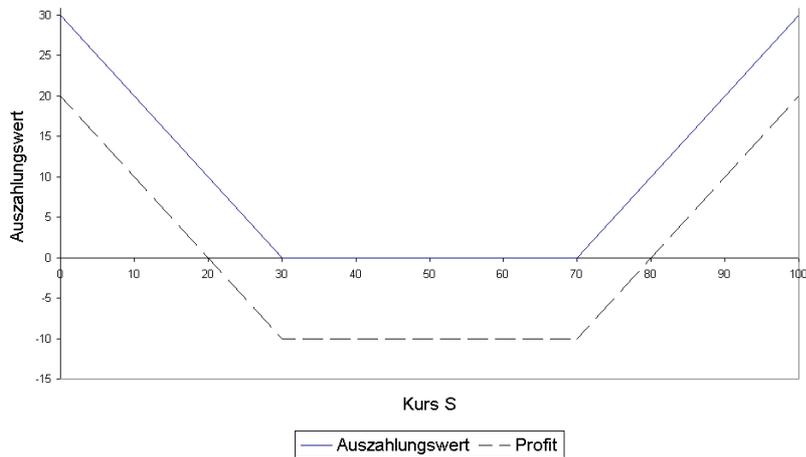


Abbildung 13: Der Auszahlungswert und der Profit des Strangle-Portfolios

**Bullish Spread** Ein Bullish Spread besteht aus zwei Calloptionen mit demselben Ausübungszeitpunkt und unterschiedlichen Ausübungspreisen. Die Option mit dem niedrigeren Strikepreis wird gekauft, die mit dem höheren wird verkauft. Durch diese Kombination konstruiert der Investor ein Portfolio, das einen für ihn günstigen Hebel besitzt. Der Preis für das Portfolio und damit das eingesetzte Kapital ist niedriger als der Preis der gekauften Option. Trotzdem ist der Auszahlungswert beider Finanztitel bei steigendem Aktienkurs bis zu einer Grenze, die durch die zweite Option gegeben ist, gleich. Damit ist die Rendite des Portfolios größer als die der einzelnen Option. Außerdem ist der maximal mögliche Verlust durch das Portfolio niedriger als der der Option. Für diesen Vorteil verzichtet

der Investor jedoch auf Gewinne bei einem sehr großem Kursanstieg. Der Auszahlungswert dieser Strategie ist in Tabelle 11 und ihr Profit in Abbildung 14 dargestellt.

	$S \leq K_1$	$K_1 < S < K_2$	$S \geq K_2$
Call long	0	$S - K_1$	$S - K_1$
Call short	-0	-0	$-(S - K_2)$
= Portfolio	0	$S - K_1$	$K_2 - K_1$

Tabelle 11: Auszahlungswert: Bullish Spread

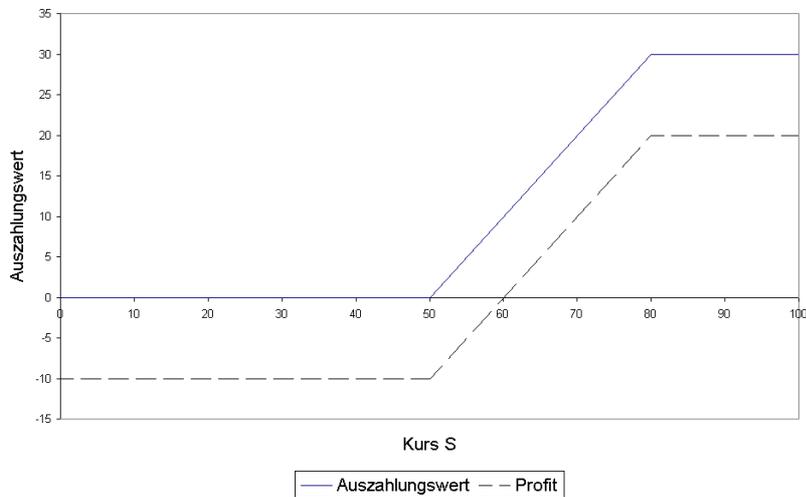


Abbildung 14: Der Auszahlungswert und der Profit des Bullish-Spread-Portfolios

**Butterfly Spread** Der Butterfly Spread eignet sich für die Spekulation auf geringe Kursschwankungen. Im Gegensatz zum Short Straddle ist jedoch die Höhe seines maximal erzielbaren Verlustes beschränkt. Um den Butterfly Spread zu konstruieren kauft der Investor zwei Calls mit unterschiedlichen Ausübungspreisen, die den Bereich, in dem die Kursschwankungen erwartet werden, eingrenzen. Außerdem verkauft er 2 Calls mit dem gleichen Ausübungspreis, der innerhalb des gewählten Bereiches liegt. Der Auszahlungswert dieser Strategie ist in Tabelle 12 angegeben. Der Profit der einzelnen Portfolioelemente ist in Abbildung 15 und der Profit der Strategie ist in Abbildung 16 dargestellt.

	$S \leq K_1$	$K_1 \leq S < K_2$	$K_2 < S \leq K_3$	$K_3 < S$
Call(A) long	0	$S - K_1$	$S - K_1$	$S - K_1$
Call(B) long	0	0	0	$S - K_3$
2 Call short	-0	-0	$-2(S - K_2)$	$-2(S - K_2)$
= Portfolio	0	$S - K_1$	$2K_2 - K_1 - S$	$2K_2 - K_1 - K_3$

Tabelle 12: Auszahlungswert: Butterfly Spread

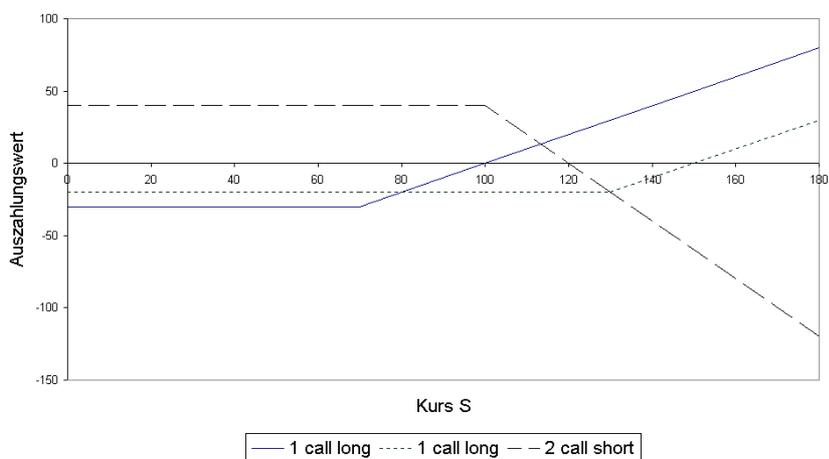


Abbildung 15: Der Profit für einen Call long mit dem Ausübungspreis  $K = 70 \text{ €}$ , einen Call long mit dem Ausübungspreis  $K = 130 \text{ €}$  und zwei Calloptionen short mit dem Ausübungspreis  $K = 100 \text{ €}$

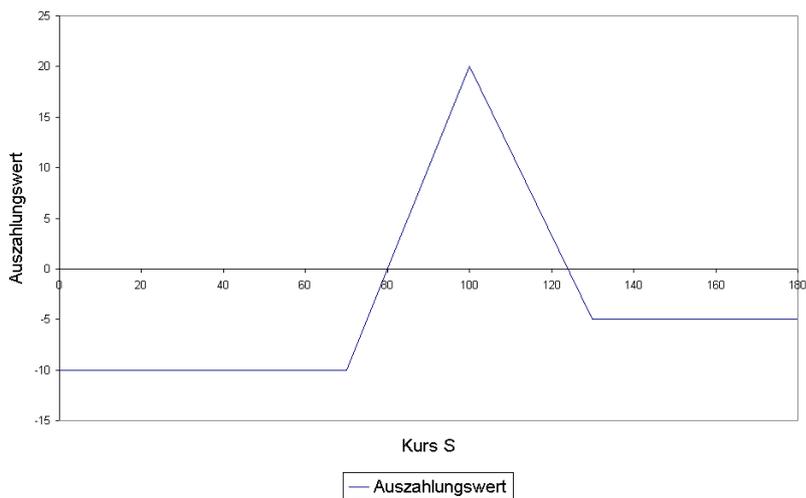


Abbildung 16: Der Profit des Butterfly-Spread-Portfolios

**Abschlussbemerkung** Es handelt sich bei Optionen um Finanzinstrumente, deren eigene Wertentwicklung zwar unsicher ist, die aber den Preis für ihr Underlying festlegen. Damit eignen sie sich hervorragend zur Spekulation aber auch zur Absicherung von Portfolios gegen Kursschwankungen. Der Spekulationseinsatz und die Kosten für die Absicherung ergeben sich aus dem Preis der Option am Geschäftsabschluss. Wie der faire Preis einer Option bestimmt werden kann wird im folgenden dargestellt.

### 3 Die Bewertung von Optionen mit dem Black-Scholes-Modell

Myron S. Scholes und Fischer Black entwickelten Anfang der siebziger Jahre in enger Zusammenarbeit mit Robert C. Merton ein Modell für die Bewertung von Optionen und veröffentlichten 1973 die nach ihnen benannte partielle Differentialgleichung. Mit der Black-Scholes-Gleichung können die europäischen Standardoptionen bewertet werden. Dieses Modell erleichterte den Optionshandel und trug dazu bei, dass der gesamte Derivatemarkt so schnell und so enorm wachsen konnte. Die Bewertungsmodelle für viele Optionstypen lassen sich entweder direkt oder indirekt aus dem Black-Scholes-Modell herleiten. Für ihre Pionierarbeit erhielten Myron S. Scholes und Robert C. Merton 1997 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Fischer Black konnte diese Ehren nicht in Empfang nehmen, da er 1995 verstarb.

#### 3.1 Der theoretische Wert einer Option

Der Preis einer Option ist prinzipiell durch das Angebot und die Nachfrage am Markt bestimmt. Diesem freien Marktpreis dient als Grundlage ein *theoretischer Preis*. In der Regel weichen der freie Marktpreis und der theoretische Preis nicht besonders voneinander ab. Der theoretische Preis einer Option wird durch die folgenden Faktoren bestimmt:

1. Der Kurs der zugrunde liegenden Aktie relativ zum Ausübungspreis (innere Wert)
2. Die verbleibende Zeit, bis die Option verfällt
3. Die Volatilität der zugrundeliegenden Aktie
4. Die Höhe des risikolosen Zinssatzes
5. Die Höhe der gezahlten Dividenden der zugrunde liegenden Aktie

Die Faktoren (2) bis (5) bestimmen den sogenannten *Zeitwert* der Option. Dieser berücksichtigt das unsichere Verhalten der Aktie. Der theoretische Preis einer Option setzt sich demnach aus ihrem inneren Wert und ihrem Zeitwert zusammen. Erst am Ausübungszeitpunkt einer Option fällt ihr Zeitwert weg und ihr gehandelter

	$S \leq K$	$S = K$	$S \geq K$
$V^P(S_T, T)$ long	$K - S$	0	0
$V^C(S_T, T)$ short	0	0	$-(S - K)$
$S(T)$ long	S	K	S
$P(T)$	K	K	K

Tabelle 13: Der Auszahlungswert des risikolosen Put-Call-Portfolios

Wert entspricht ihrem inneren Wert, kann also durch die Auszahlungsfunktion angegeben werden.

**Die Put-Call-Parität** Der Zusammenhang zwischen dem Preis für einen europäischen Put und einen europäischen Call auf dieselbe Aktie mit demselben Ausübungszeitpunkt und Ausübungspreis lässt sich mit der Put-Call-Parität beschreiben. Diese Beziehung wird mit Hilfe der No-Arbitrage-Annahme aus der folgenden Situation hergeleitet:

Der Writer eines Calls möchte sich gegen die möglichen Verluste aus seinem Optionsgeschäft absichern. Dazu kauft er eine Aktie, deren Kursgewinne die Verpflichtungen aus dem Callgeschäft ausgleichen. Außerdem kauft er einen Put, der den gleichen Ausübungspreis wie der Call besitzt, um sich gegen die Kursverluste der Aktie abzusichern. Der Verkäufer des Calls besitzt nun das Portfolio

$$P = -V^c(t) + V^p(t) + S(t). \quad (9)$$

**Bemerkung 3.1** In Abschnitt 2.3 wurde die Verwendung der "+" und "-" - Zeichen bei der Darstellung eines Portfolios beschrieben: mit einem "-" - Zeichen werden die Portfolioanteile gekennzeichnet, die für den Besitzer eine Verpflichtung darstellen. In dem oben besprochenen Fall hat der Portfoliobesitzer den Call verkauft und muss am Verfallstermin der Option seiner Verpflichtung aus diesem Geschäft nachkommen. In dem Absicherungsportfolio  $P$  wird diese Verpflichtung mit einem "-" - Zeichen gekennzeichnet. Finanztitel, die dem Portfoliobesitzer gehören, markiert er mit einem "+" - Zeichen.

Das Portfolio ist risikolos, da es an dem Ausübungszeitpunkt  $T$  zu einem sicheren Zahlungsbetrag in Höhe des Ausübungspreises  $K$  der Optionen führt, wie in Tabelle 13 dargestellt ist. Da das Portfolio einen garantierten Endwert besitzt, ergibt sich sein Wert  $P(t)$  an einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  durch Abzinsung des sicheren Endwertes  $K$  mit dem risikolosen Zinssatz  $r$ . Es gilt daher,

$$-V^c(t) + V^p(t) + S(t) = K \exp(-r(T - t)) \quad (10)$$

Wäre das Portfolio an einem Zeitpunkt  $t$  billiger als in (10) angegeben, könnte man sich bei der Bank für den risikolosen Zins den nötigen Betrag leihen und das Portfolio kaufen. Der Gewinn am Ausübungszeitpunkt wäre dann größer als die Verpflichtung an die Bank und man würde einen risikolosen Gewinn erzielen. Wäre das Portfolio teurer als gefordert, würde man es verkaufen und den Betrag zum risikolosen Zins bei der Bank anlegen. Am Ausübungszeitpunkt ist die Verpflichtung durch das verkaufte Portfolio geringer als der verzinste Betrag. Man würde wieder einen risikolosen Gewinn erzielen.

Für einen Put und einen Call auf dieselbe Aktie mit dem gleichen Ausübungszeitpunkt und Ausübungspreis gilt aus Arbitragegründen die Gleichung (10). Diese Beziehung wird *Put-Call-Parität* genannt. Mit der Put-Call-Parität kann aber nur eine Aussage über den Zusammenhang zwischen dem Preis für einen Put und einen Call getroffen werden. Um den Wert einer einzelnen Option bestimmen zu können, muss das Verhalten des Aktienkurses berücksichtigt werden.

Die Idee der Optionsbewertung besteht darin, mit einer Option und einem Aktienanteil ein Portfolio zu konstruieren, bei dem sich die Kursänderung der Aktie und die damit verbundene Wertänderung der Option ausgleichen. Da dieses Portfolio kein Risiko beinhaltet entspricht seine Rendite, wegen der No-Arbitrage-Bedingung, dem risikolosen Zinssatz  $r$ . Aus den Informationen über den Wert des Portfolios kann der Preis für die Option hergeleitet werden.

Da jedoch nur unzureichend Informationen über den Kursverlauf bestehen muss man auf geeignete Modelle, die den Verlauf des Aktienkurses widerspiegeln, zurückgreifen. Einen diskreten und damit einfachen und anschaulichen Zugang findet zuerst durch das Binomialmodell statt. Danach folgt das kontinuierliche Aktienkursmodell, das zu der von Black und Scholes hergeleiteten Gleichung für die Bewertung von europäischen Optionen führt.

### **3.2 Die Bewertung von Optionen auf der Grundlage des Binomialmodells**

In diesem Kursmodell wird mit einem diskreten Zeitverlauf und dadurch mit einer diskreten Kursentwicklung gearbeitet. Die Eigen-

schaften der Zeit- und Kursentwicklung sind durch die zwei folgenden Voraussetzungen gegeben<sup>3</sup>:

(V1) Der betrachtete Zeitraum wird in äquidistante Teilintervalle der Länge  $\delta t$  unterteilt.

- $t_i = i\delta t$
- $S_i = S(t_i)$

(V2) Der Kurs  $S$  kann sich in jedem Zeitintervall in nur zwei Kurswerte entwickeln.

- er steigt um den Faktor "up":  $S_{i+1} = S_i \cdot \text{up}$
- er fällt um den Faktor "down":  $S_{i+1} = S_i \cdot \text{down}$

Für den Kursverlauf ergibt sich nach diesen Bedingungen ein Binomialbaum, der, wie in Abbildung 17 dargestellt ist, bei einem Startwert  $S_0$  beginnt und sich an jeder Knotenstelle in zwei Richtungen verzweigt.

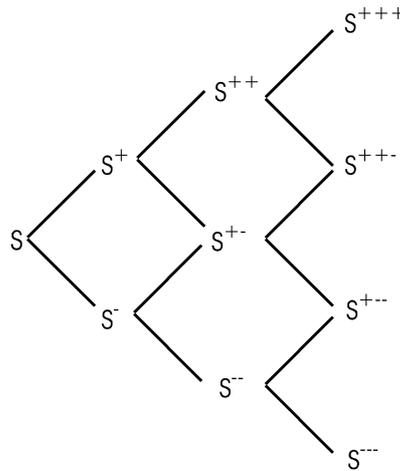


Abbildung 17: Die schematische Darstellung eines Binomialbaumes. Die Anzahl der "+" - und "-" - Zeichen gibt an, wie häufig der Kurs gestiegen beziehungsweise gefallen ist.

### 3.2.1 Die Bewertung mit dem Binomialmodell

Im Folgenden wird die Bewertung einer Option mit dem Binomialmodell an einem Beispiel demonstriert:

Es soll der faire Preis für einen Call bestimmt werden, mit dem der

<sup>3</sup>Eine umfangreichere Beschreibung des Binomialmodells wird zum Beispiel in [7] angegeben

Käufer das Recht erhält in einem Jahr die IBM-Aktie zu einem Preis von  $K = 22 \text{ €}$  zu kaufen. Der Kurs der Aktie steht zum Zeitpunkt  $t_0$  bei  $S_0 = 25 \text{ €}$ . Der risikolose Zinssatz beträgt  $r = 10\%$ .

**Der Einperiodenfall** Im einfachsten Fall entspricht das Intervall  $\delta t$  der Haltedauer der Option, der entsprechende Binomialbaum ist in Abbildung 18 dargestellt. Es müssen nur der Anfangszeitpunkt  $t_0$  und der Ausübungszeitpunkt  $t = T$  betrachtet werden. Für die Entwicklung des Aktienkurses wird angenommen, dass der Kurs in dem Intervall  $\delta t$  entweder um 20% steigt oder fällt.

$S_0$	$K$	$T$	$\delta t$	$up$	$down$	$r$
25 €	22 €	1Jahr	1Jahr	1.2	0.8	0.1

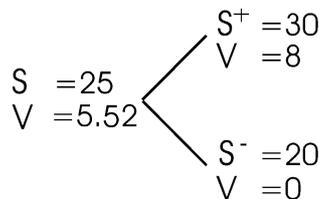


Abbildung 18: Der Binomialbaum für den Einperiodenfall

**Das Risikolose Portfolio** Die Wertänderung einer verkauften Calloption kann durch den Kauf von  $\Delta$  Aktien ausgeglichen werden. Steigt der Kurs der Aktie, dann gleichen die Kursgewinne den Verlust durch den verkauften Call aus. Entsprechend werden im umgekehrten Fall die Kursverluste der Aktie durch den Gewinn aus dem Call-Geschäft ausgeglichen. Dieses Portfolio hat zum Zeitpunkt  $t_0$  den Wert:

$$P_0 = \Delta S_0 - V_0^c \quad (11)$$

Zum Zeitpunkt  $t = T$  sind zwei Erscheinungsformen für den Aktienkurs und damit für das Portfolio möglich, diese sind in Tabelle 14 dargestellt. In beiden Fällen ist der Wert des risikolosen Portfolios  $P_1$  gleich groß und das Gleichungssystem daher eindeutig lösbar.

Es liefert sowohl den Wert des Portfolios zum Ausübungszeitpunkt,  $P_1 = 16 \text{ €}$ , wie auch die Anzahl der zum Hedgen benötigten Aktien,  $\Delta = 0.8$ . Durch Abzinsung ergibt sich der Anfangswert des Portfolios,

$$P_0 = P_1 \exp(-r(\delta t)) = 14.48 \text{ €} . \quad (12)$$

	Aktiekurs (€)	Optionswert (€)	Portfoliowert (€)
Kursanstieg	30	8	$P_1 = \Delta 30 - 8$
Kursabfall	20	0	$P_1 = \Delta 20$

Tabelle 14: Der Wert des risikolosen Portfolios zum Zeitpunkt  $t = T$

Setzt man die Ergebnisse in Gleichung (11) ein, so kann der faire Wert der Option,

$$V_0^c = 0.8 \cdot 25 \text{ €} - 14.48 \text{ €} = 5.52 \text{ €} \quad (13)$$

bestimmt werden.

**Interpretation der Hedge-Strategie** Durch den Verkauf des Calls erhält der Investor 5.52 €. Um den Call zu hedgen benötigt er 0.8 Aktien, die 20 € kosten. Die fehlenden 14.48 € muss der Investor von seinem eigenen Kapital bereitstellen. Dadurch ergibt sich der Preis des Portfolios. Nach einem Jahr sind zwei Situationen möglich:

- *Der Aktienkurs steigt auf  $S_1 = 30 \text{ €}$*   
Die 0.8 Aktien sind 24 € wert und es besteht eine Verpflichtung aus dem Call-Geschäft in Höhe von 8 €. Den Betrag von 16 € erhält der Investor.
- *Der Aktienkurs sinkt auf  $S_1 = 20 \text{ €}$*   
Die 0.8 Aktien sind 16 € wert und es besteht keine Verpflichtung aus dem Call-Geschäft. Den Betrag von 16 € erhält der Investor.

In beiden Fällen erhält der Investor durch den Einsatz von eigenem Kapital in Höhe von 14.48 € einen Betrag von 16 €. Die Rendite entspricht natürlich dem risikolosen Zinssatz  $r$ , da es sich um eine risikolose Geldanlage gehandelt hat.

**Der Mehrperiodenfall** Das Ergebnis, dass man mit dem obigen Vorgehen erhält, ist aber noch nicht zufriedenstellend, da die Intervalllänge viel zu groß gewählt wurde und die Aktie nur einmal in einem Jahr ihren Kurs ändert. Um realistischere Werte zu erhalten muss man eine bedeutend kleinere Zeitdiskretisierung wählen. In dem folgenden Beispiel wird die Lebensdauer der Option in zwei Zeitintervalle unterteilt. Diese Intervalllänge ist zwar immer noch nicht

ausreichend klein, um ein vernünftiges Ergebnis zu erzielen, reicht aber aus, um die Vorgehensweise zu verdeutlichen.

$S_0$	$K$	$T$	$\delta t$	$up$	$down$	$r$
20 €	22 €	1Jahr	6Monat	1.2	0.8	0.1

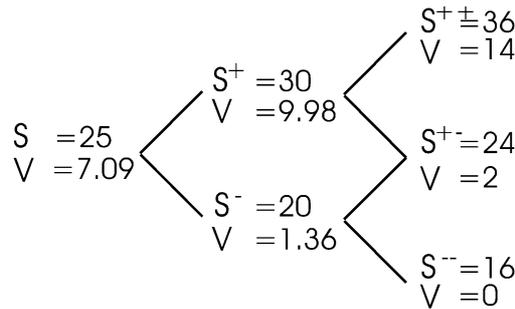


Abbildung 19: Der Binomialbaum mit den Optionswerten für den Zweiperiodenfall

In dem Binomialbaum, der in Abbildung 19 dargestellt ist, sind für jeden diskreten Zeitpunkt und möglichen Aktienkurs die fairen Preise für die Option eingetragen.

Der Optionspreis zum Zeitpunkt  $t_0$  wird ausgehend vom Ausübungszeitpunkt  $t = T$  rekursiv bestimmt. Dazu ermittelt man für jeden Zeitschritt und jeden möglichen Aktienkurs den fairen Optionspreis und die Anzahl der zum Hedgen benötigten Aktien nach dem aus dem Einperiodenfall bekannten Vorgehen. In dem hier besprochenen Zweiperiodenfall müssen drei Einperiodenfälle bearbeitet werden.

Um einen Optionswert zu ermitteln, der am realen Markt verwendet werden kann, muss die Intervalllänge  $\delta t$  in dem Binomialmodell sehr klein gewählt werden. Dadurch erhöht sich der Rechenaufwand erheblich.

### 3.3 Die Black-Scholes-Gleichung für europäische Standardoptionen

Von einem kontinuierlichen Kursverlauf geht das Modell von Black und Scholes aus. Dieses Modell liefert eine partielle Differentialgleichung, die mit den entsprechenden End- und Randbedingungen ein End-Randwertproblem ergibt, mit dem die Werte einer europäischen Option bestimmt werden können. Im Folgenden werden die wesentlichen Annahmen dargestellt, die zur Gültigkeit des Modells führen

(siehe auch [5], [30], [36]):

- (V1) Es gibt keine Arbitrage-Möglichkeiten
- (V2) Die Variablen sind stetig
- (V3) Der risikolose Zinssatz  $r$  und die Volatilität  $\sigma$  der Aktie sind konstant
- (V4) Es fallen keine Gebühren, Steuern oder Dividenden an
- (V5) Es wird eine europäische Option betrachtet
- (V6) Der Aktienkurs  $S$  genügt einer geometrischen Brownschen Bewegung und sein Return ist lognormalverteilt

### 3.3.1 Ein kontinuierliches Modell für den Kursverlauf

Mit dem Modell der *geometrischen Brownschen Bewegung* kann der Bewegungsverlauf von Blütenpollen auf einer Flüssigkeitsoberfläche beschrieben werden. Die Blütenpollen reagieren mit ihrer Bewegung auf das Zusammenstoßen mit Molekülen der Flüssigkeit. Dadurch kann zu keinem Zeitpunkt eine exakte Vorhersage über die nächste Bewegung der Pollen getroffen werden. Ihr Bewegungsverlauf entspricht damit einem stetigen stochastischen Prozess (siehe Definition 3.1). Das Modell der geometrischen Brownschen Bewegung liefert eine stochastische Differentialgleichung für die relative Änderung der Lage  $L$  der Pollen in dem Zeitintervall  $dt$ .

$$\frac{dL}{L} = \nu dt + \lambda dW \quad (14)$$

Mit der deterministischen Driftrate  $\nu dt$  wird die tendenzielle Lageänderung der Blütenpollen in dem Zeitintervall  $dt$  angegeben. Die stochastischen Schwankungen, die durch das unsichere Zusammenstoßen der Pollen mit den Molekülen entstehen, werden durch den Term  $\lambda dW$  berücksichtigt. Dabei kennzeichnet  $W$  einen Wiener Prozess, der eine spezielle Form eines stetigen stochastischen Prozesses darstellt.

**Definition 3.1 (stetiger stochastischer Prozess)** *Ein stetiger stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallszahlen  $X(t)$ , die für eine stetige Zeit  $t$  definiert sind. Die Zeit  $t$  variiert kontinuierlich in einem Intervall  $I$ , z.B.  $0 \leq t \leq T$ . Statt  $X(t)$  kann man auch  $X_t$  schreiben.*

**Definition 3.2 (Wiener Prozess)** *Ein Wiener-Prozess  $W_t$  ist ein stetiger stochastischer Prozess mit den Eigenschaften*

(E1)  $W_0 = 0$

(E2)  $W_t$  ist normalverteilt mit

- dem Erwartungswert  $E(W_t) = 0$  und
- der Varianz  $Var(W_t) = t$

(E3) Alle Zuwächse  $\delta W$  sind unabhängig voneinander

Die Zuwächse des Wiener Prozesses in dem Intervall  $\delta t$  sind durch die Intervalllänge und die normalverteilte Zufallsvariable  $\phi$  bestimmt:

$$\delta W = \phi\sqrt{\delta t} \quad \text{mit} \quad E(\phi) = 0 \quad E(\phi^2) = 1$$

**Das Aktienkursmodell** Der reale Kurs einer Aktie verhält sich ähnlich wie die Lage der Blütenpollen. Er besitzt eine tendenzielle Wertentwicklung, die durch den Erwartungswert der Aktienrendite  $\mu$  bestimmt wird. Zusätzlich wird der Aktienkurs durch sehr viele Faktoren beeinflusst, deren Wirkung häufig nur sehr schwer vorhergesagt werden kann. Vergleicht man die Prognosen für ein anstehendes Börsenjahr mit dem abschließenden Fazit, dann wird man nur wenig Gemeinsamkeiten erkennen. Da die Ursachen und die daraus resultierenden Wirkungen bei Kursänderungen nur unzureichend vorhergesagt werden können, betrachtet man die Schwankungen des Aktienkurses, ähnlich wie die Bewegung der Blütenpollen, als zufällig. Eine Information über die Kursschwankungen einer Aktie kann man jedoch aus der Vergangenheit erhalten und für die nahe Zukunft verwenden. Es handelt sich dabei um das Ausmaß, mit dem der Kurs einer Aktie auf die Umweltsituationen reagiert. Eine Aktie, deren Kurs bisher sehr deutlich auf positive oder negative Informationen reagiert hat, wird dieses Verhalten in der Zukunft mit großer Wahrscheinlichkeit beibehalten. Genauso wird der Kurs einer Aktie, der sich in der Vergangenheit nahezu nach dem erwarteten Verlauf entwickelt hat, dieses Verhalten auch in der näheren Zukunft beibehalten. Das Ausmaß der Schwankungen einer Aktie wird durch ihre Volatilität  $\sigma$  beschrieben.

Auf Grund der Gemeinsamkeiten des Kurses einer Aktie und der Bewegung der Blütenpollen verwendet man für die Beschreibung der relativen Änderung des Aktienkurses  $\frac{dS}{S}$  die stochastische Differentialgleichung der Brownschen Molekularbewegung (14) und setzt die

erwartete Rendite  $\mu$  und die Volatilität  $\sigma$  der Aktie entsprechend ein.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW \quad (15)$$

In der Abbildung 20 sind die Kursverläufe von Aktien, die mit der stochastischen Differentialgleichung (15) modelliert wurden, dargestellt. Die Auswirkung der verschiedenen Volatilitäten ist darin deutlich zu erkennen. Am Markt liegen die Volatilitäten der Aktien in dem Bereich  $0.1 \leq \sigma \leq 0.3$ . Die erwartete Kursentwicklung ist durch die erwartete Rendite  $\mu$  der Aktie gegeben, die in diesem Fall dem risikolosen Zinssatz  $r$  entspricht.

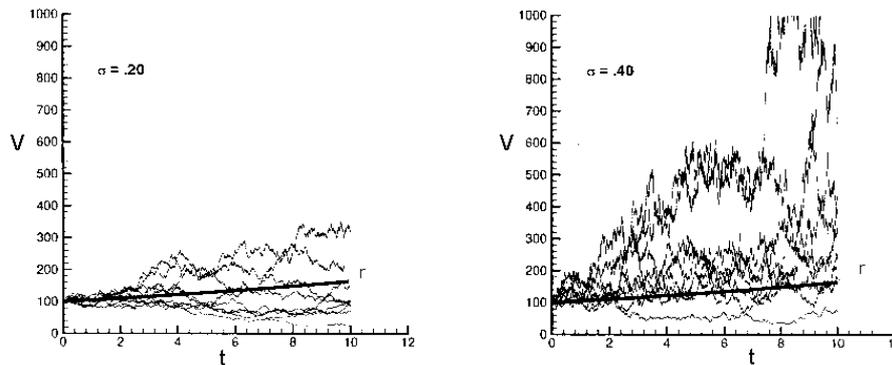


Abbildung 20: Der Kursverlauf nach dem Modell der geometrischen Brownschen Bewegung mit  $\sigma = 0.2$  und  $\sigma = 0.4$  (aus [13])

### 3.3.2 Die Black-Scholes-Gleichung

Der Wert einer Option verhält sich durch die enge Beziehung zum Kurs seiner zugrunde liegenden Aktie genauso unsicher wie der Aktienkurs selbst. Mit dem Lemma von Ito kann man aus der stochastischen Differentialgleichung, die für den Aktienkurs besteht, eine stochastische Differentialgleichung für den Optionswert herleiten.

**Definition 3.3 (Ito-Lemma)** Gegeben ist eine Funktion  $G(S,t)$ , wobei  $S$  dem stochastischen Prozess aus Gleichung (15) folgt. Dann ändert für kleine Zeitintervalle  $dt$  die Funktion ihren Wert von  $G$  nach  $G + dG$ , mit

$$dG = (\mu G_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2} G_{SS} + G_t) dt + \sigma S G_S dW \quad (16)$$

Betrachtet man die Optionswertentwicklung in dem Binomialmodell, dann wird deutlich, dass der Wert der Option von dem Aktienkurs  $S$  und der Zeit  $t$  abhängt. Da der Aktienkurs die stochastische Differentialgleichung (15) erfüllt, sind die Voraussetzungen des Ito-Lemmas gegeben und man erhält für den Optionswert die stochastische partielle Differentialgleichung

$$dV = (\mu V_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} + V_t)dt + \sigma S V_S dW. \quad (17)$$

Um den fairen Wert der Option zu bestimmen konstruiert man wieder ein risikoloses Portfolio, bestehend aus einer verkauften Calloption und einer Anzahl  $\Delta$  der zugrunde liegenden Aktie. Für den Wert des Portfolios gilt:

$$P = \Delta S - V \quad (18)$$

In kleinen Zeitintervallen  $dt$  ändert sich der Wert des Portfolios zu

$$P = P + dP \quad (19)$$

mit

$$dP = \Delta dS - dV. \quad (20)$$

Setzt man (15) und (17) in Gleichung (20) ein, so erhält man

$$dP = \sigma S(\Delta - V_S)dW + (-\mu S V_S - \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} - V_t + \mu \Delta S)dt. \quad (21)$$

Durch die Wahl von  $\Delta = V_S$  wird der stochastische Anteil der Differentialgleichung eliminiert. Man erhält für die Zeitspanne  $dt$  ein risikoloses Portfolio, dessen Wertefunktion die Differentialgleichung

$$dP = (-\frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} - V_t)dt \quad (22)$$

erfüllt. Aus Arbitragegründen muss sich der Wert des Portfolios entsprechend der risikolosen Verzinsung entwickeln,

$$dP = Prdt. \quad (23)$$

Aus den Gleichungen (22) und (23) folgt:

$$Prdt = (-\frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} - V_t)dt \quad (24)$$

Mit

$$P = \Delta S - V = V_S S - V \quad (25)$$

erhält man die Black-Scholes Gleichung,

$$\mathcal{L}_{BS}V = V_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} + rSV_S - rV = 0. \quad (26)$$

Mit der Black-Scholes-Gleichung (26) besitzt man eine partielle Differentialgleichung, die das Verhalten des Optionswertes in Abhängigkeit von der Zeit und der Kursentwicklung der Aktie beschreibt. Das für die betrachtete Aktie charakteristische Verhalten ist in der Black-Scholes-Gleichung durch ihre Volatilität  $\sigma$  dargestellt.

**Interpretation der Hedge-Strategie** Der Writer der Option hedget die verkaufte Option über den gesamten Zeitraum, indem er immer so viele Aktien besitzt wie er benötigt um Schwankungen im Optionswert auszugleichen. Da er dafür ständig den Aktienanteil  $\Delta = V_S$  seines Portfolios aktualisieren muss, nennt man diese Art des Hedgen *Deltahedgen*.

### 3.3.3 Die End-Randwertaufgabe für europäische Optionen

Aus den bisher gewonnen Erkenntnissen läßt sich eine End-Randwertaufgabe herleiten, die als Lösung die Wertfunktion einer europäischen Standardoption liefert. Die dabei verwendete Black-Scholes-Gleichung (26) gilt nur für Aktien ohne Dividendenzahlungen. Durch eine kleine Änderung kann man die partiellen Differentialgleichung jedoch an diese Situation anpassen (siehe [30]). In dem weiteren Verlauf werden nur Aktien betrachtet, bei denen keine Dividenden gezahlt werden, deren Kursverläufe daher die Black-Scholes-Gleichung erfüllen.

Am Ausübungstermin  $t = T$  fällt der Zeitwert der Option weg und ihr Wert, mit dem sie gehandelt wird, entspricht nur noch ihrem inneren Wert. Die Auszahlungsfunktion der Option liefert damit die Endbedingung für die partielle Differentialgleichung.

Die Endbedingung für einen Call:

$$V^C(T) = \max(S(T) - K, 0) \quad (27)$$

Die Endbedingung für einen Put:

$$V^P(T) = \max(K - S(T), 0) \quad (28)$$

Die Randbedingungen ergeben sich aus der Put-Call-Parität

$$V^P(S(t), t) + S(t) = V^C(S(t), t) + K \exp(-r(T - t)). \quad (29)$$

Ist die Aktie wertlos, dann würde kein Investor Geld ausgeben, um diesen Finanztitel in Zukunft zu einem bestimmten Preis kaufen zu dürfen, da er ihn jetzt umsonst bekommen kann. Damit ist der Call in dieser Situation wertlos und der Preis für den Put ergibt sich aus der Gleichung (29). Ist der Wert der Aktie nahezu unendlich hoch, dann würde kein Investor Geld ausgeben, um die Aktie später für einen, um ein Vielfaches niedrigeren Preis verkaufen zu dürfen. In diesem Fall ist der Put wertlos und der Preis des Calls kann mit der Black-Scholes-Gleichung bestimmt werden.

Die Randbedingungen für einen Call:

$$V^C(0, t) = 0 \quad (30)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V^C(S, t) = S - K \exp(-r(T - t)) \quad (31)$$

Die Randbedingungen für einen Put:

$$V^P(0, t) = K \exp(-r(T - t)) \quad (32)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V^P(S, t) = 0 \quad (33)$$

**Die Lösungsfunktion** Bei der Lösung des End-Randwertproblems wird der rechte Rand durch einen maximalen Kurswert  $S^{max}$  festgelegt. Dieser muss groß genug gewählt werden, um den Fehler so gering wie möglich zu halten. Ein Richtwert liegt bei dem Zwei- bis Dreifachen des Ausübungspreises der Option. Als Lösung erhält man ein Flächenstück über dem Gebiet  $0 \leq S \leq S^{max}$  und  $0 \leq t \leq T$  in der S-t-Ebene.

Die Lösungsfunktionen für einen Call und einen Put sind in der Abbildung 21 und in der Abbildung 22 dargestellt. Sie geben den Wert der entsprechenden Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Abhängigkeit von ihrem Kurs an.

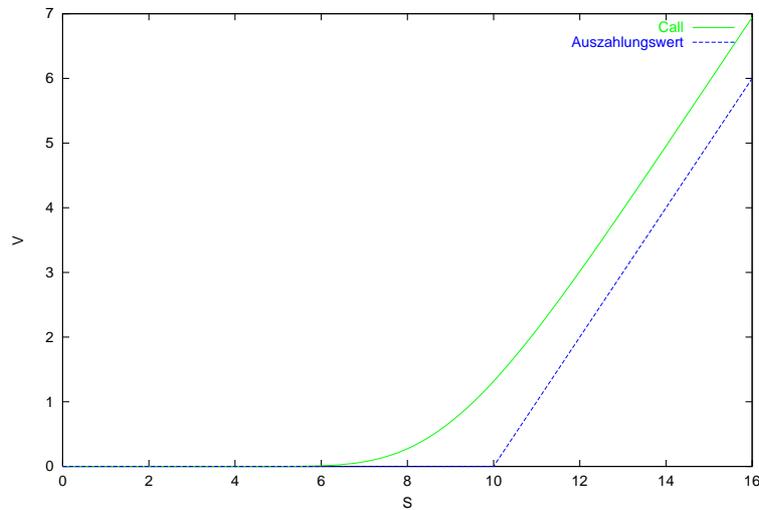


Abbildung 21: Der Wert für einen europäischen Call auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$ , dem risikolosen Zins  $r = 0.1$ , der Laufzeit  $T = 1$  Jahr und dem Ausübungspreis  $K = 10$  €

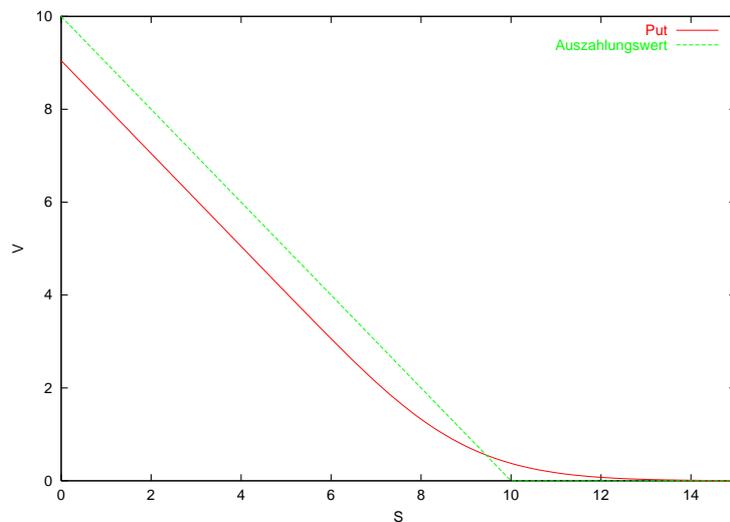


Abbildung 22: Der Wert für einen europäischen Put auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$ , dem risikolosen Zins  $r = 0.1$ , der Laufzeit  $T = 1$  Jahr und dem Ausübungspreis  $K = 10$  €

Der Wert einer Option setzt sich aus ihrem inneren Wert und ihrem Zeitwert zusammen. Der Zeitwert einer Putoption kann je nach Aktienkurs sowohl positive wie auch negative Werte annehmen. Diese Eigenschaft ist in Abbildung 23 zu erkennen, die die Wertefunktion an verschiedenen Zeitpunkten darstellt. Dagegen ist

der Zeitwert eines Calls, bei dem keine Dividenden gezahlt werden, nie negativ. Nur wenn Dividenden gezahlt werden kann es vorkommen, dass auch der Zeitwert eines Calls negativ wird. Ähnlich wie bei den Futures muss der Writer berücksichtigen, dass er durch den weiteren Besitz der Aktie Dividendengewinne erzielt und die Prämie für die Option entsprechend senkt.

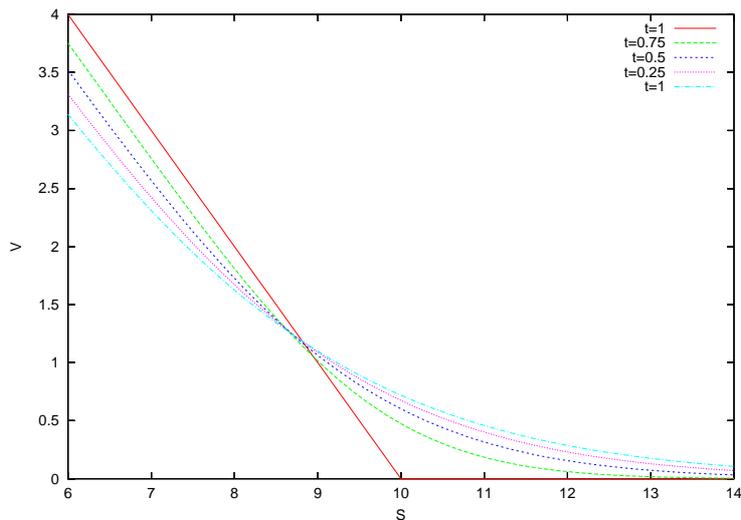


Abbildung 23: Der Wert einer europäischen Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$ , dem risikolosen Zins  $r = 0.1$ , der Laufzeit  $T = 1$  Jahr und dem Ausübungspreis  $K = 10$  € an verschiedenen Zeitpunkten

Einen entscheidenden Einfluss auf den Wert einer Option hat die Volatilität der Aktie. Dieser Einfluss wird in Abbildung 24 demonstriert.

### 3.4 Die Black-Scholes-Ungleichung für amerikanische Optionen

Amerikanische Optionen zeichnen sich durch das zusätzliche Recht aus, auch vor dem Verfallstermin der Option ausgeübt werden zu dürfen. Dadurch bieten sie ihrem Besitzer neben den Möglichkeiten einer europäischen Option den Vorteil auf die aktuelle Marktsituation direkt reagieren zu können. Die Strategien, die in Abschnitt 2.4 angesprochen wurden, können bei einer amerikanischen Option während der gesamten Lebensdauer des Derivates zum Erfolg führen.

Durch die vorzeitige Ausübung ändert sich der Wert der Option, da ihr Zeitwert wegfällt und sie ihren inneren Wert annimmt. Um das

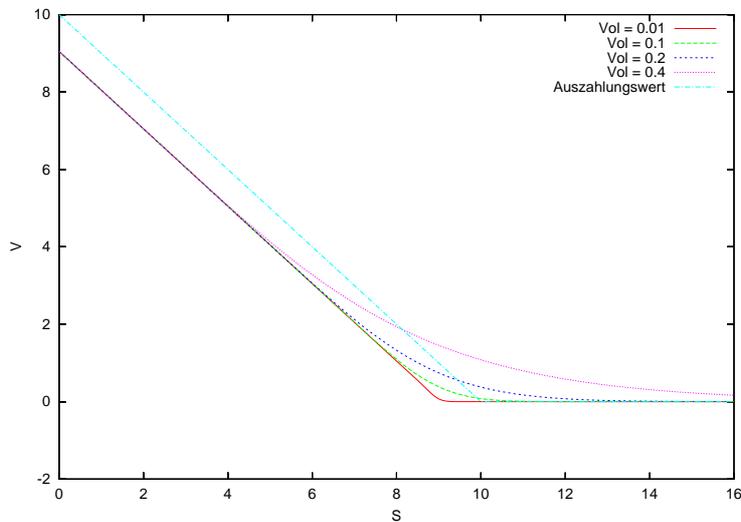


Abbildung 24: Der aktuelle Wert von europäischen Putoptionen auf Aktien mit verschiedenen Volatilitäten, dem risikolosen Zins  $r = 0.1$ , der Laufzeit  $T = 1$  Jahr und dem Ausübungspreis  $K = 10 \text{ €}$

Änderungsverhalten des Preises einer amerikanischen Option zu beschreiben, erhält man eine Ungleichung, die aus der Black-Scholes Gleichung hergeleitet wird.

Auf Grund des zusätzlichen Rechtes ist der Preis für eine amerikanische Option mindestens so hoch wie der einer europäischen Option,

$$V^{am} \geq V^{eu}. \quad (34)$$

Außerdem kann der Preis einer amerikanischen Option aus Arbitrargründen niemals kleiner als ihr Auszahlungswert werden,

$$V^{am} \geq G. \quad (35)$$

Da ihre Ausübung zu jedem Zeitpunkt möglich ist, könnte man sonst die Option kaufen und durch die sofortige Ausübung einen sicheren Gewinn auf Kosten des Optionsverkäufers erzielen.

Der Zeitwert der Option fällt bei der vorzeitigen Ausübung weg, wodurch sich der Wert einer amerikanischen Option nicht nur durch Kursänderungen sondern auch durch ihre frühzeitige Ausübung ändern kann. Deltahedgen bietet aber nur eine Absicherung des Portfolios gegen Kursschwankungen wodurch der Unsicherheitsfaktor der vorzeitigen Ausübung bestehen bleibt. Der Writer, der die Aus-

übungsstrategie des Holders nicht kennt, wird den Preis für die Option so wählen, dass er auf keinen Fall einen Verlust einbüßen wird. Dazu muss die Rendite seines deltaghedgten Portfolios mindestens so groß sein wie der risikolose Zinssatz  $r$ . Das deltaghedgete Portfolio hat den Wert

$$P = \Delta S - V. \quad (36)$$

Für die Wertänderung des Portfolios gilt:

$$\Delta dS - dV \geq r(\Delta S - V)dt \quad (37)$$

Auf demselben Weg, der bei der Herleitung der Black-Scholes Gleichung verwendet wurde, erhält man für amerikanische Optionen die Ungleichung:

$$\mathcal{L}_{BS}V = V_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} + rSV_S - rV \leq 0 \quad (38)$$

Da der Wert einer amerikanischen Option und der einer europäischen Option am Verfallstermin des Derivates übereinstimmen, sind auch die Endbedingungen beider End-Randwertprobleme identisch. Die Auszahlungsfunktion der betrachteten Option liefert die Endbedingung.

Die Endbedingung für einen Call:

$$V^C(T) = \max(S(T) - K, 0) \quad (39)$$

Die Endbedingung für einen Put:

$$V^P(T) = \max(K - S(T), 0) \quad (40)$$

Bei der Bestimmung der Randbedingungen muss wieder berücksichtigt werden, dass der Optionswert nicht kleiner sein darf als der zugehörige Auszahlungswert. Bei einem europäischen Call tritt dieser Fall nicht ein, wenn keine Dividenden gezahlt werden, wodurch die Randwerte für einen amerikanischen und europäischen Call übereinstimmen. Die Randwerte eines amerikanischen Puts sind für den Fall  $S = 0$  größer als die der europäischen Variante, sie werden durch den Auszahlungswert der Option gegeben.

Die Randbedingungen für einen Call:

$$V^C(0, t) = 0 \quad (41)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V^C(S, t) = S - K \exp(-r(T - t)) \quad (42)$$

Die Randbedingungen für einen Put:

$$V^P(0, t) = K \quad (43)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V^P(S, t) = 0 \quad (44)$$

### 3.4.1 Das lineare Komplementaritätsproblem

Eine amerikanische Option darf aus den oben angesprochenen Arbitragegründen keinen Preis annehmen, der kleiner ist als ihr Ausübungswert. Ein europäischer Call auf eine Aktie ohne Dividendenzahlung erfüllt diese Bedingung zu jedem Zeitpunkt. Daher stimmen der Preis eines amerikanischen und eines europäischen Calls überein, wenn keine Dividenden gezahlt werden.

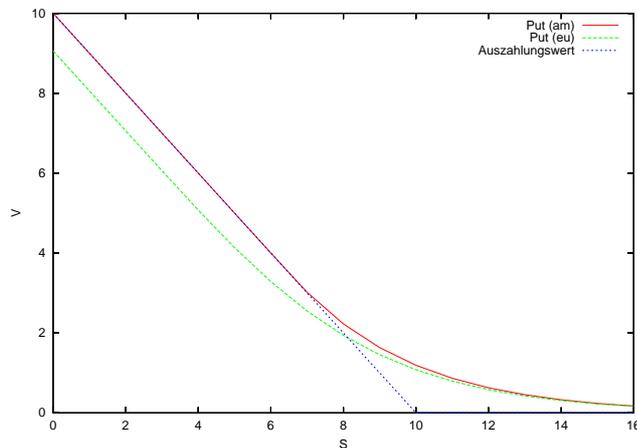


Abbildung 25: Der Wert eines europäischen und amerikanischen Put in Relation zu ihrem inneren Wert

Schneiden die Werte einer europäischen Option ihre Auszahlungsfunktion, wie es bei einem Put vorkommt, dann unterscheidet sich der Wert dieser europäischen Option von dem Preis der entsprechenden amerikanischen Variante.

Die Werte für einen europäischen und amerikanischen Put an einem festen Zeitpunkt  $t^*$  sind in Abbildung 25 dargestellt. Der amerikanische Put läuft an dem *Aufsprungpunkt*  $S_f(t^*)$  in die Auszahlungsfunktion hinein. Während für einen amerikanischen Put ein solcher Aufsprungpunkt  $S_f$  immer existiert, kann er bei einem Call nur vorkommen, falls Dividenden gezahlt werden. An dem Aufsprungpunkt besitzt die Wertefunktion die Steigung  $V_S^P = -1$  für einen Put und  $V_S^C = 1$  für einen Call, es handelt sich also um einen glatten Einlauf.

**Ökonomische Bedeutung des Aufsprungpunktes** Aus ökonomischer Sicht stellt der Aufsprungpunkt für den deltahedgenden Optionsbesitzer den optimalen Ausübungszeitpunkt dar. Um sich diese eher theoretische Gegebenheit zu verdeutlichen muss man die Wertentwicklung seines Portfolios betrachten. Das Portfolio des Holders verhält sich spiegelverkehrt zu dem des Writers, es besitzt den Wert

$$P = V - \Delta S . \quad (45)$$

Der Writer bewertet die Option so, dass er in der Regel einen Gewinn und im schlechtesten Fall weder einen Verlust noch einen Gewinn erzielt. Das bedeutet, dass die Rendite seines Portfolios mindestens so groß ist wie der risikolose Zinssatz  $r$ . Dadurch ist die Rendite für das Portfolio des Holders höchstens so groß wie der risikolose Zinssatz  $r$ ,

$$dP = dV - \Delta dS \leq r(V - \Delta S) . \quad (46)$$

Der günstigste Ausübungszeitpunkt für den Holder ist der Zeitpunkt, an dem sein Verlust am niedrigsten ist. Da sein Verlust der Gewinn des Writers ist muss er den Zeitpunkt finden, an dem der Writer seinen geringsten Gewinn erzielt. Solange der Optionspreis größer ist als die Auszahlungsfunktion erzielt der Writer einen Gewinn falls die Option vorzeitig ausgeübt wird. Denn der Wert des Derivates reduziert sich auf den Ausübungswert wodurch sich die Verpflichtung des Writers um den Zeitwert der Option verringert. Der Holder sollte daher nur vorzeitig ausüben wenn der Optionspreis mit dem Ausübungspreis übereinstimmt. Der Aufsprungpunkt markiert also die Grenze zwischen den Bereichen, in denen ausgeübt werden darf und in denen nicht ausgeübt werden soll.

**Numerische Bedeutung des Aufsprungpunktes** Die Lösungsfläche der Black-Scholes-Ungleichung wird durch die Aufsprungpunkte in zwei Bereiche unterteilt. In dem einen stimmt die Lösung mit der Auszahlungsfunktion überein, in dem anderen nimmt sie größere Werte an.

Der deltahedgende Optionsinhaber wird mit Sicherheit von seinem vorzeitigen Ausübungsrecht keinen Gebrauch machen falls der Writer einen Gewinn dadurch erzielt. Daher gilt in dem Bereich, in dem der Optionspreis größer ist als der Wert der Auszahlungsfunktion, die Black-Scholes-Gleichung,

$$V > G \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{BS}V = 0 . \quad (47)$$

In dem Bereich, in dem der Preis der Option mit dem Wert ihrer Auszahlungsfunktion übereinstimmt, gilt dementsprechend die Kleinerrelation,

$$V = G \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{BS}V < 0. \quad (48)$$

Der Wert einer amerikanischen Option setzt sich demnach aus ihrer Auszahlungsfunktion und einer Funktion, die die Black-Scholes-Gleichung erfüllt, zusammen (siehe Tabelle 15). Da der Aufsprung-

	$S \leq S_f$	$S > S_f$
Put	$V_P^{am} = K - S$	$V_P^{am}$ löst B-S-Gleichung
Call	$V_C^{am}$ löst B-S-Gleichung	$V_C^{am} = S - K$

Tabelle 15: Der Aufsprungpunkt unterteilt die Lösungsfläche in einen Bereich, in dem die Black-Scholes-Gleichung gilt und einem Bereich, in dem die Black-Scholes-Ungleichung gilt

punkt  $S_f$  für jeden Zeitpunkt unbekannt ist können amerikanische Optionen nicht ohne weiteres mit der Black-Scholes-Gleichung bewertet werden. Der Rand, der den Bereich, in dem die Black-Scholes-Gleichung gilt, begrenzt, ergibt sich erst mit der Lösung der Black-Scholes-Ungleichung. Man spricht daher von einem *freien Randwertproblem*. Die Abbildungen 26 und 27 zeigen den Verlauf des Aufsprungpunktes  $S_f(t)$  und damit den freien Rand für Aktien mit den Volatilitäten  $\sigma = 0.2$  und  $\sigma = 0.4$ .

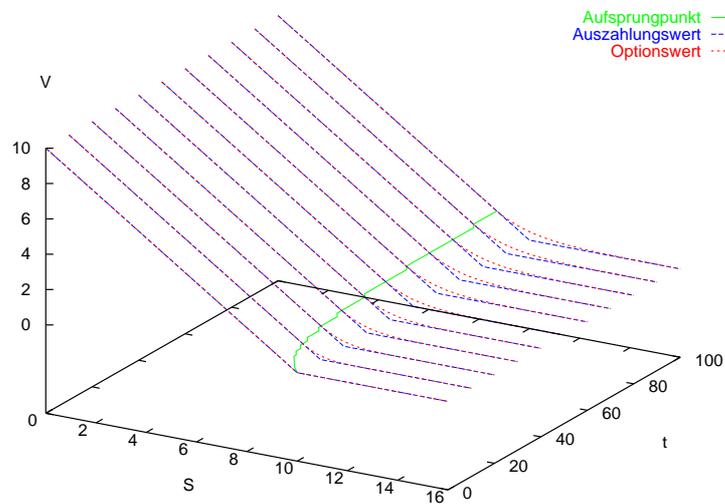


Abbildung 26: Der Verlauf des Aufsprungpunktes bei der Volatilität  $\sigma = 0.2$

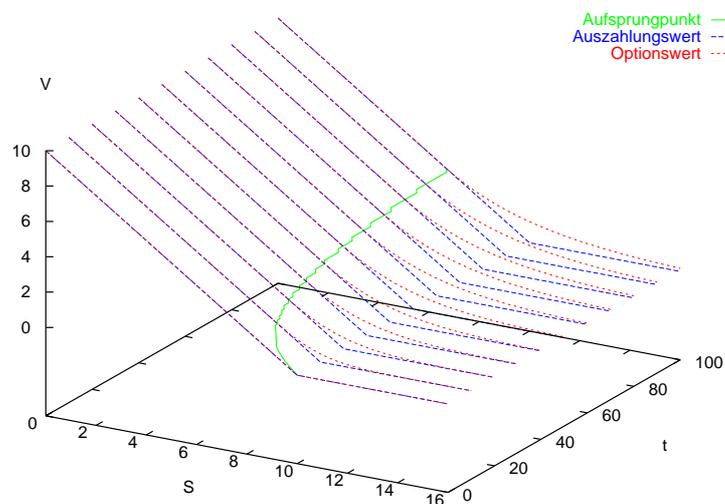


Abbildung 27: Der Verlauf des Aufsprungpunktes bei der Volatilität  $\sigma = 0.4$

Sehr häufig können freie Randwertprobleme als lineare Komplementaritätsprobleme (vergleiche [36], [30]) dargestellt und so besser iterativ gelöst werden. Auch für das freie Randwertproblem der amerikanischen Optionen ist das möglich. Für die Bewertung ame-

rikanischer Optionen auf dem Gebiet  $\Omega = [0, S^{max}]$  gilt das folgende lineare Komplementaritätsproblem.

$$\begin{aligned}
 V(P) - G(P) &\geq 0 \\
 \mathcal{L}_{BS}V(P) &\leq 0 \\
 (V(P) - G(P))(\mathcal{L}_{BS}V(P)) &= 0 \\
 P &\in \Omega
 \end{aligned} \tag{49}$$

Die End- und Randbedingungen sind von dem Optionstyp abhängig und werden durch die Auszahlungsfunktion und die Put-Call-Parität gegeben.

**Kritische Anmerkung** Das Ergebnis wurde aus einer theoretischen Situation hergeleitet, da von einem deltaxedgenden Optionsbesitzer ausgegangen wurde. Warum sollte aber ein Investor ein Portfolio konstruieren, dessen Wertentwicklung im günstigsten Fall der risikolosen Verzinsung entspricht? Realistischer ist die Annahme, dass Optionen gekauft werden, um ein Portfolio statisch zu hedgen oder um sie als spekulatives Instrument einzusetzen. In beiden Fällen wird der Holder die Option dann ausüben, wenn es für ihn am besten ist, und bei seiner Entscheidung nicht den Nachteil für den Writer berücksichtigen. Angenommen ein Investor spekuliert mit einem Call auf den steigenden Kurs einer Aktie, bei der keine Dividenden gezahlt werden. Aus theoretischer Sicht müsste er die Option bis zu ihrem Verfallsdatum halten, da kein Aufsprungpunkt existiert. Ist der Aktienkurs tatsächlich gestiegen und die Marktsituation weist deutlich auf einen baldigen Kursabfall hin, dann wird der Investor sein Recht anwenden und die Option sofort ausüben, um den erzielten Gewinn zu sichern.

Aus dieser Tatsache ergibt sich das hohe Angebot und auch die hohe Nachfrage an amerikanischen Optionen am Markt. Für den Holder sind Optionen vom amerikanischen Typ interessant, da er spontan auf die Marktsituation reagieren kann. Der Writer, der die Option deltaxedged, kann in keinem Fall Verluste aber durch die vorzeitige Ausübung einen Gewinn erzielen.

## 4 Optionen am Kapitalmarkt

Dass Optionen Chancen auf hohe Gewinne aber auch Risiken mit sich bringen wurde in den vorherigen Kapiteln angesprochen. Nur wer die Eigenschaften dieser Derivate kennt ist in der Lage sich gegen ihre Risiken abzusichern und so ihre Gewinnmöglichkeiten auszunutzen.

### 4.1 Beurteilung einer gehandelten Option

Der Wert einer Option hängt von einigen Einflussfaktoren ab, die drei wichtigsten davon sind:

- der Aktienkurs relativ zum Basispreis,
- die Restlaufzeit bis zum Verfallstermin,
- die Volatilität der Aktie.

Sowohl für den Holder wie auch für den Writer von Optionen ist es von großem Interesse zu wissen, wie sensibel der Optionswert auf diese drei Faktoren reagiert. Diese Informationen sind zum Beispiel wichtig, wenn eine verkaufte Option abgesichert (siehe Abschnitt 4.2) oder die Option wegen ihres Hebeleffektes als spekulatives Instrument eingesetzt werden soll. Die "Kürzel", die verwendet werden, um die Veränderungen der Optionsprämie, die aus den oben angesprochenen Faktoren resultieren, zu beschreiben, werden allgemein als *die Griechen* bezeichnet, da griechische Buchstaben dafür verwendet werden. Neben den hier angesprochenen Griechen, dem Delta und dem Gamma einer Option, gibt es weitere, die zum Beispiel in [28] oder [7] nachgelesen werden können. Für den weiteren Verlauf reicht es aus, die beiden hier vorgestellten Griechen zu kennen.

**Das Delta eine Option** Mit dem Optionsdelta  $\Delta$  wird die Sensitivität des Optionswertes auf die Kursänderungen der Aktie quantifiziert. Es entspricht der Steigung der Wertefunktion in Kursrichtung,

$$\Delta = V_S . \quad (50)$$

Damit gibt das Delta einer Option den Betrag an, um den sich ihr Wert näherungsweise ändert, falls der Aktienkurs um einen Euro steigt oder fällt. Für das Optionsdelta wird das gleiche Zeichen verwendet, mit dem bei der Herleitung der Black-Scholes-Gleichung

die Anzahl der zum Hedgen benötigten Aktien angegeben wurde. Im Folgenden wird sich zeigen, dass der Aktienanteil eines risikolosen Portfolios gerade durch das Optionsdelta bestimmt wird.

Mit dem Optionsdelta kann man Aktien und Optionen auf diese Aktien vergleichen. Diese Möglichkeit wird zum Beispiel bei dem Portfoliomanagement ausgenutzt, um Portfolios aus Aktien und Optionen zu beurteilen.

**Beispiel 4.1** *Ein Portfoliomanager soll zwei Portfolios bezüglich ihrer Sensitivität auf Kursschwankungen vergleichen. Portfolio A besteht aus 750 Calloptionen auf die IBM Aktie und 200 IBM Aktien. Portfolio B ist ein reines Aktienportfolio mit 800 IBM Aktien. Das Delta der Calloptionen beträgt  $\Delta^C = 0.6$ .*

*Der Wert einer Option reagiert weniger sensibel auf Kursschwankungen als die Aktie selbst, wodurch ein Vergleich durch die Anteile der Finanztitel nicht möglich ist. Die beiden Portfolios können aber verglichen werden wenn man das Delta der Option verwendet. Bei einem Delta von  $\Delta^C = 0.6$  verhält sich eine Option wie 0.6 Aktien. Alle 750 Optionen verhalten sich demnach wie  $750 * 0.6 = 450$  Aktien. Das Portfolio A besitzt damit eine Sensitivität, die der eines Aktienportfolios mit 650 IBM Aktien entspricht. Portfolio A reagiert also weniger sensibel auf Kursschwankungen als das Portfolio B.*

Das Optionsdelta spielt eine tragende Rolle bei der Entscheidungsfindung im Optionshandel. Deswegen ist es sehr wichtig den genauen Deltawert zu kennen und zu wissen, wie sich dieser Wert bei Änderungen des Aktienkurses verhält. Diese Informationen liefert das Gamma der Option.

**Das Gamma einer Option** Das Gamma  $\Gamma$  einer Option bezieht sich nicht unmittelbar auf den Optionswert, sondern auf das Delta der Option. Mit dem Gamma wird die Veränderung des Deltawertes der Option für eine Kursänderung der zugrundeliegenden Aktie um einen Euro bezeichnet,

$$\Gamma = \Delta_S = V_{SS}. \quad (51)$$

Das Gamma einer Option wird vorwiegend dabei verwendet ein Portfolio zu konstruieren, das unabhängig vom Aktienkurs sein soll.

#### 4.1.1 Die Optionselastizität

In dem Beispiel 4.1 wurden zwei Portfolios auf Grund ihrer Sensitivität bezüglich der Kursschwankungen miteinander verglichen. Dabei wurde keine Aussage über des Verhalten der jeweiligen Renditen getroffen. Besitzt das Portfolio A auf Grund der billigeren Optionen einen niedrigeren Gesamtwert als Portfolio B, so können die geringeren Wertänderungen trotzdem zu einer größeren Schwankung der Rendite führen als es bei Portfolio B der Fall ist.

Bei der Beurteilung von Optionen reicht es nicht aus zu wissen in welchem Ausmass der Wert des Derivates auf die Kursschwankungen reagiert, man sollte auch das Verhalten seiner Rendite kennen. In ihr spiegelt sich die Hebelwirkung der Option wieder (vergleiche Abschnitt 2.2.2). Ein Maß für diesen Hebel ist die Optionselastizität, die auch theoretischer Hebel genannt wird.

**Definition 4.1** (*Optionselastizität*) Die Optionselastizität gibt den prozentualen Wechsel des Optionswertes bei prozentualem Wechsel des Aktienkurses an.

$$\begin{aligned} & \frac{\text{prozentualer Wechsel im Optionswert}}{\text{prozentualer Wechsel im Aktienkurs}} \\ &= \frac{\frac{V(S_{0+\delta t}) - V(S_0)}{V(S_0)}}{\frac{S_{0+\delta t} - S_0}{S_0}} = V_S \frac{S_0}{V(S_0)} \end{aligned} \quad (52)$$

Ein Investor, der für einen festen Betrag entweder nur Aktien oder nur Optionen kaufen möchte erfährt durch den theoretischen Hebel, um welchen Faktor die Wertänderung des Optionsportfolios größer ist als die des Aktienportfolios.

**Beispiel 4.2** Ein Investor möchte 12000 € anlegen. Für ihn stehen zwei Alternativen zur Auswahl. Entweder er kauft IBM Aktien für 120 € pro Aktie oder er investiert sein ganzes Kapital in Calloptionen auf die IBM Aktie, die 5 € kosten. Die Optionen haben einen Ausübungspreis von 120 € und ihr Delta beträgt  $\Delta^C = 0.6$ . Um eine Entscheidung treffen zu können betrachtet der Investor die Optionselastizität.

Steigt der Kurs der Aktie um einen Euro also 0.83%, so wächst der Optionswert um 0.6 €, das entspricht einem Wertzuwachs von 12%. Die Optionselastizität liegt damit bei

$$\frac{12\%}{0.83\%} = 14.4 \quad (53)$$

*Entscheidet sich der Investor für das Optionsportfolio so ist der Betrag, den er gewinnen kann 14.4, mal größer als der, den ihm das Aktienportfolio einbringen könnte. Leider verhält es sich mit dem Verlust ebenso.*

Über den theoretischen Hebel von Optionen kann man sich in Finanzzeitschriften informieren.

## 4.2 Strategien mit dem Optionsdelta und ihre Gefahren

Das Optionsdelta kann als die Anzahl der Aktien interpretiert werden, deren Wertänderung betraglich der Änderung des Optionwertes entsprechen. Mit der Kenntnis von dem Deltawert einer Option ist es daher einem Investor möglich die Wertänderung dieser Option nachzubilden.

### 4.2.1 Hedgestrategien mit dem Delta der Option

Durch die geeignete Kombination einer Option und der durch das Optionsdelta angegebenen Anzahl von Aktien ist es möglich ein Portfolio zu konstruieren, das unempfindlich ist gegenüber Kursänderungen. Bei diesem abgesicherten oder auch gehedgeten Portfolio gleichen sich die Gewinne und Verluste der Option und des Aktienanteils aus. Das Optionsdelta wird damit auch als *Hedgerate* bezeichnet.

**Der Optionswriter sollte Delta Hedgen** Genauso wie der Aktienkurs beliebig steigen kann ist die Höhe des Verlustes für den Writer eines Calls theoretisch unbegrenzt. Bei einem verkauften Put ist der maximale Verlust zwar begrenzt, kann aber trotzdem erheblich sein. Der Writer einer Option geht mit dem Geschäft ein hohes Risiko ein und erhält dafür nur die Optionsprämie und einen möglichen Preisaufschlag. Um die Gefahr seines Ruins zu minimieren, sollte er die verkaufte Option hedgen.

**Beispiel 4.3** *Eine Bank verkauft 100000 Calloptionen auf die Daimler Aktie für 300000 € unter den folgenden Voraussetzungen:*

*Aktienkurs:  $S_0 = 49$  €*

*Ausübungspreis:  $K = 50$  €*

*Aktienvolatilität:  $\sigma = 0.2$*

*risikofreier Zinssatz:  $r = 0.05$*

*Ausübungszeitpunkt:  $T = 20$  Wochen*

*Dividenden: keine*

*Der faire Preis der Option, der mit dem Black-Scholes-Modell ermittelt wurde, liegt bei  $V^C = 2.4$  €. Die Bank erzielt also durch den Verkauf der Optionen einen Gewinn von 60000 €. Dieser Betrag reicht jedoch nicht aus, um Verluste durch einen größeren Kursanstieg auszugleichen. Steigt der Aktienkurs bis zum Ausübungszeitpunkt auf  $S_T = 60$  €, dann beträgt die Höhe der Verpflichtung der Bank:  $100000 \cdot (60 \text{ €} - 50 \text{ €}) = 1000000$  €. Schon bei einem Kursanstieg um 2 € auf  $S = 51$ € reicht die Prämie nicht aus, um die Verluste zu decken.*

**Statisches Deltahedgen** Der Writer einer Option kann seine Verluste einschränken indem er zusätzlich Aktien kauft oder verkauft, je nach dem ob es sich bei der Option um einen Call oder um einen Put handelt. Die Anzahl der Aktien, die er benötigt, ist durch die Hedgerate beziehungsweise das Delta der Option vorgegeben. Beim statischen Deltahedgen bleibt der Aktienanteil im Portfolio bis zum Ausübungszeitpunkt konstant oder wird nur in größeren Abständen, zum Beispiel wöchentlich, aktualisiert.

**Beispiel 4.4** *Das Optionsdelta liegt zum Zeitpunkt  $t_0$  bei  $\Delta^C = 0.52$ .*

*Um den verkauften Call abzusichern kauft die Bank 52000 Daimler Aktien für 2548000 € und finanziert dieses Geschäft durch ein Darlehen zum risikolosen Zinssatz  $r$ .*

*Nach einer Woche ist der Aktienkurs auf  $S_{\frac{1}{20}} = 52$  € gestiegen:*

- Der Wert eines Calls steigt auf  $V^C = 41.60$  €. Damit sind die Optionen 416000 € wert und führen zu einem Verlust von 116000 €.*
- Der Wert der 52000 Aktien beträgt 2704000 €.*
- Die Verpflichtungen aus dem geliehenen Kapital sind durch die Verzinsung auf 2550392 € angestiegen.*

*Der Gewinn der Bank aus dem Optionsgeschäft liegt nach einer Woche und einem Kursanstieg auf  $S_{\frac{1}{20}} = 52$  € bei 37608 €.*

**Dynamisches Deltahedgen** Der Optionswriter kann das Risiko aus seinem Geschäft vollkommen eliminieren, indem er die Anzahl der Aktien in seinem Portfolio ständig dem Optionsdelta angleicht. Man nennt diese Art des Hedgen daher auch *dynamisches Deltahedgen*. Wenn er die Option etwas teurer verkauft als es der faire Preis aus der Black-Scholes-Analyse vorgibt, wird dieser Aufschlag durch das dynamische Deltahedgen zu seinem sicheren Gewinn.

Das Anfangsportfolio ist aus den folgenden Positionen gegeben:

- eine Option mit dem Wert  $V$  short,
- den Betrag  $(SV_S - V)$  von der Bank geliehen,
- $V_S$  Aktien zum Preis  $S$  long.

Ständig wird die Anzahl der Aktien dem Delta der Option angeglichen, so dass in dem Portfolio immer  $V_S$  Aktien vorhanden sind. Gewinne durch den Verkauf der Aktien werden zum risikolosen Zinssatz angelegt und das Geld, das zum Kauf von Aktien benötigt wird, wird zum gleichen Zins geliehen. Das Portfolio besteht aus den folgenden Anteilen:

- eine Option mit dem Wert  $V_t$  short.
- $V_S$  Aktien zum Preis  $S_t$  long.
- $(V - SV_S)$  Verpflichtung oder Anlage bei der Bank.

Zu jedem Zeitpunkt kann das Portfolio aufgelöst und allen Verpflichtungen nachgekommen werden. Insgesamt führt diese Strategie zu einem Portfolio, das weder einen Verlust noch einen Gewinn einbringt, unabhängig vom Verlauf des Aktienkurses. Das ist aus Arbitragegründen auch nötig, da der Optionswriter kein eigenes Kapital bei dieser Strategie verwendet. Man nennt eine solche Strategie *selbstfinanzierend*.

#### 4.2.2 Synthetischer Put

Dass ein Aktionär seine Aktien durch einen Put absichern kann wurde schon anhand der Protective-Put-Strategie (siehe Abschnitt 2.4.2) demonstriert. Die maximale Dauer dieser Absicherung ist jedoch durch die Lebensdauer der Option, die in der Regel nicht länger als ein Jahr ist, beschränkt. Um einen größeren Zeitraum zu überbrücken, könnte ein Investor immer wieder neue Put Optionen

kaufen. Auf diese Weise führt er jedoch ein weiteres Risiko ein, da er die zukünftigen Preise der Optionen nicht kennt. Der Investor hat jedoch die Möglichkeit einen Put mit der gewünschten Lebensdauer synthetisch zu konstruieren (vergleiche [5]). Dazu bestimmt er mit dem Black-Scholes Modell das Delta der gewünschten Option und erhält so die Anzahl der Aktien, die er verkaufen muss, um die Wertänderung des Puts zu duplizieren. Wie bei dem dynamischen Hedgen muss die Anzahl der Aktien ständig aktualisiert werden.

**Beispiel 4.5** *Ein Investor besitzt ein Aktienportfolio mit 10000 IBM Aktien, deren Kurs bei 100 € steht. Er möchte mit einem synthetischen Put sein Portfolio absichern. Dazu bestimmt er mit dem Black-Scholes-Modell das Delta seiner gewünschten Option und erhält  $\Delta^P = -0.6$ . Zur Absicherung seines Portfolios muss er also 60% seiner Aktien verkaufen und den Gewinn risikolos anlegen. In Tabelle 16 ist der Verlust des Protective-Put-Portfolios angegeben, der bei einem Kursverlust der IBM Aktie um 2 € entsteht. In Tabelle 17 ist der entsprechende Verlust des synthetischen Protective-Put-Portfolios angegeben. Beide Portfolios führen natürlich zu dem gleichen Verlust.*

Verlust durch Aktien	$-(2 \text{ €} * 10000)$	-20000 €
+Gewinn durch Put	$10000(0.6 * 2 \text{ €})$	12000 €
= Nettoverlust		-8000 €

Tabelle 16: Verlust des Protective-Put-Portfolios

Verlust durch Aktien	$-(2 \text{ €}) * 4000$	8000 €
+Verlust durch risikolose Anlage	0 €	0 €
= Nettoverlust		-8000 €

Tabelle 17: Verlust des synthetischen Protective-Put-Portfolios

*Wenn der Aktienanteil immer dem Optionsdelta angepasst wird, verhält sich ein synthetischer Put genauso wie eine gewöhnliche Put-option.*

#### 4.2.3 Die Gefahren des Delta Hedgen

Die Absicherungsstrategie des Deltahedgen beinhaltet neben den offensichtlichen Vorteilen auch Unsicherheiten und Risiken. Ein unlösbares Problem stellt die Bestimmung der richtigen Volatilität dar.

Da die Volatilität nur aus vergangenen Werten abgeschätzt werden kann und naturgemäß variiert sind Fehler der Prognosen nicht zu vermeiden. Man kann nur versuchen die Abweichung so gering wie möglich zu halten. Als Folge der fehlerhaft eingeschätzten Volatilität erhält man ungenaue Deltawerte und kann dadurch sein Portfolio nicht richtig hedgen. Außerdem wird der Strategie des dynamischen Deltahedgen vorgeworfen, dass sie zur Marktvolatilität beiträgt (vergleiche [5]). Sowohl bei der Absicherung eines verkauften Calls wie auch bei einem synthetischen Put werden Aktien verkauft falls der Kurs der Aktie fällt beziehungsweise werden Aktien gekauft wenn er steigt. Dadurch wird die Kursbewegung verstärkt.

Im Falle einer hohen Marktvolatilität, die zum Teil von den Optionen verursacht wird, ergibt sich eine große Gefahr, die von den Optionen ausgeht: Ihre Absicherung bricht gerade dann zusammen, wenn der Aktienmarkt großen Schwankungen unterworfen ist, sie also am meisten gebraucht werden. Genau diese Situation trat am 19. Oktober 1987 ein, als der Markt an einem Tag einen Verlust von 20% hinnehmen mußte<sup>4</sup>. Die Marktvolatilität war bei diesem crash so hoch wie nie zuvor. Dementsprechend waren die Deltas der Putoptionen zu klein und die Portfoliomanager behielten zu viele Aktien. Die underhedgeten Portfolios führten zu großen Verlusten. Um die richtige Hedgerate zu erreichen wurden immer mehr Aktien verkauft wodurch der Fall des Aktienkurses weiter voran getrieben wurde. Zum Teil variierten die Kurse so schnell, dass die Optionspreise und damit die Optionsdeltas nicht schnell genug hergeleitet werden konnten und ein dynamisches Hedgen unmöglich wurde. Die immer noch underhedgten Portfolios führten zu weiteren Verlusten. Da sehr häufig Futures anstelle von Aktien gehandelt werden nutzte der Futuremarkt die Lage aus und senkte die Preise. Die Abbildung 28 zeigt, dass die Futurepreise teilweise sogar unter dem Aktienkurs lagen, eine Situation, die der fairen Bewertung dieser Derivate widerspricht. Dadurch wurden die Verluste der Anleger weiterhin erhöht. Die Idee, mit dem Verkauf der Futures zu warten bis sie wieder ihren alten Wert erreicht haben war nicht sinnvoll, da das Portfolio weiterhin underhedget war und zu größeren Verlusten führte. Kurzzeitig wurde der Handel mit Futures sogar unterbrochen.

**Bemerkung 4.1** *Bei der bisherigen Betrachtung wurden die Transaktionskosten vernachlässigt. Am realen Markt fallen mit dem Han-*

---

<sup>4</sup>Eine ausführlichere Beschreibung der Ereignisse können in [5] nachgelesen werden

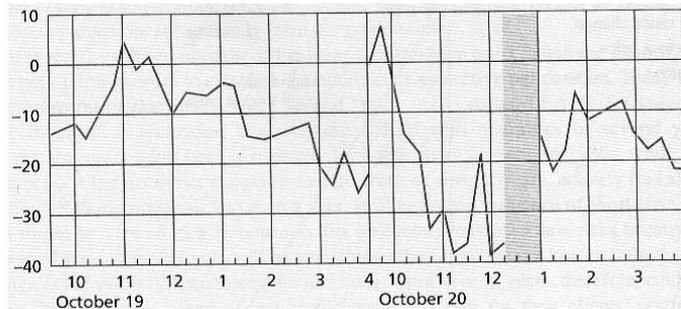


Abbildung 28: Die Preisdifferenz zwischen einem Future und der zugehörigen S&P Aktie. Der Futurehandel setzte zwischen 12:15 und 1:05 aus (aus [5])

*del von Aktien natürlich Kosten an, die es nicht jedem Investor ermöglichen sein Portfolio dynamisch zu hedgen. Die Kosten können aber reduziert werden indem Futures anstelle von Aktien gehandelt werden. Gekaufte und verkaufte Futures heben sich an dem Ausübungstermin zum Teil auf, so dass Transaktionskosten nur durch die übriggebliebenen Verpflichtungen entstehen.*

Entgegen der Erwartung vieler Fachleute hat sich das Delta Hedgen wieder erholt und wird besonders von großen Firmen betrieben.

#### 4.2.4 Die Spekulation auf falsch bewertete Optionen

Die Black-Scholes-Gleichung und die von ihr abgeleiteten Modelle für andere Optionstypen besitzen allgemein eine sehr große Akzeptanz. Dadurch ist es auf dem Optionsmarkt wesentlich leichter die Preise zu bestimmen als auf dem Wertpapiermarkt. Einen Unsicherheitsfaktor stellt jedoch die Volatilität der entsprechenden Aktien dar, wie in Abschnitt 4.2.3 angesprochen wurde. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Volatilität für die Zukunft zu bestimmen, jedoch sind alle Ergebnisse nur Schätzungen. Dieser Unsicherheitsfaktor bietet eine weitere Möglichkeit zur Spekulation.

**Unterschiedliche Volatilitätseinschätzungen** Schätzt man die Volatilität einer Aktie anders ein als die, die bei der Bewertung einer Option am Markt verwendet wurde, dann kann man auf diese mögliche Fehleinschätzung spekulieren. Falls die Volatilität korrigiert wird ändert sich der Marktpreis der Option. Der Spekulant muss die Option kaufen wenn sie, nach seinen Erwartungen, mit einer niedri-

geren Volatilität unterbewertet wurde. Er sollte sie verkaufen wenn er vermutet, dass bei der Bewertung eine zu hohe Volatilität verwendet wurde. Da man nur auf die fehlerhafte Bewertung der Option spekulieren möchte muss das Risiko, das durch Kursschwankungen entsteht, durch Deltahedgen eliminiert werden. Die Hedgerate wird bezüglich der erwarteten Volatilität bestimmt.

**Beispiel 4.6** *Ein Investor schätzt die Volatilität der IBM Aktie in den nächsten Wochen mit  $\sigma = 0.35$  ein. Zum selben Zeitpunkt wird auf dem Markt eine Putoption auf die Aktie gehandelt, deren Preis mit einer Volatilität von  $\sigma = 0.33$  bestimmt wurde. Der Investor möchte auf die Fehlbewertung spekulieren und kauft Put Optionen. Da er keine Vermutung über die Entwicklung des Aktienkurses hat und diesen Risikofaktor ausschließen möchte wird er sein Portfolio deltahedgen.*

*Die relevanten Marktwerte:*

*Ausübungszeitpunkt der Option:  $T = 60$  Tage*

*Putpreis:  $V_{\sigma=0.33}^P = 4.495$  €*

*Ausübungspreis:  $K = 90$  €*

*Aktienkurs:  $S_0 = 90$  €*

*Risikoloser Zinssatz:  $r=0.04$*

*Dividende: keine*

*Erwarteter Preis der Option :  $V_{\sigma=0.35}^P = 4.785$  €*

*Erwartete Hedgerate:  $\Delta_{\sigma=0.35}^P = -0.453$*

*Der Investor konstruiert sich ein Portfolio aus 1000 Putoptionen und hedget dieses mit 453 gekauften Aktien. Das Portfolio ist damit 45265 € wert. Tabelle 18 zeigt die Wertentwicklung des Portfolios falls der Optionswert der erwarteten Volatilität angepasst wird.*

Aktienkurs (€)	89	90	91
$V_{\sigma=0.35}^P$ (c)	5.254	4.785	4.347
Profit (Verlust) (€)	0.759	0.290	(0.148)
Wert von 1000 Put Optionen (€)	5254	4785	4347
Wert von 453 Aktien (€)	40317	40770	41223
Portfoliowert (€)	45571	45555	45570
Spekulationsgewinn (€)	306	290	305

Tabelle 18: Der Gewinn des gehedgeten Putportfolios

Wenn der Optionspreis der Volatilität von  $\sigma = 0.35$  angepasst wird erzielt der Investor einen Gewinn, der nahezu unabhängig vom Aktienkurs ist. Die minimalen Abweichungen, die durch die Kursschwankungen entstehen, sind durch das statische Deltahedgen zu erklären. Mit dem Kurs ändert sich auch das Delta der Option und damit die Hedgerate.

**Cross-Option Spekulation** Eine ähnliche Strategie wie die oben beschriebene kann angewendet werden, wenn zum Beispiel zwei Calloptionen auf dieselbe Aktie mit dem gleichen Ausübungszeitpunkt und unterschiedlichen Ausübungspreisen mit verschiedenen Volatilitäten bewertet wurden. Mindestens eine Option wurde in dieser Situation falsch bewertet. Um mit der fehlerhaften Bewertung zu spekulieren wird die unterbewertete Option gekauft und die überbewertete Option verkauft. Ist der Anteil der Optionen in dem Portfolio gleich groß, dann entspricht die Strategie der eines Bullish Spread, mit dem man auf Kursschwankungen in einem bestimmten Bereich spekulieren kann (siehe Abschnitt 2.4). Da man aber nur auf die Fehlbewertung spekulieren möchte muss der Anteil der Optionen in einem Verhältnis gewählt werden, in dem das Portfolio kursunabhängig ist. Die Hedgerate wird aus den Deltawerten der Optionen ermittelt. Um die Deltawerte zu bestimmen verwendet man die erwartete Volatilität.

$$\text{Hedgerate} : H = \frac{\text{Optionsdelta (Call long)}}{\text{Optionsdelta (Call short)}} \quad (54)$$

**Beispiel 4.7** Die relevanten Marktwerte:

	OptionA	OptionB
Optionspreis	$V_A^C = 2.3735\text{€}$	$V_B^C = 3.6202\text{€}$
Ausübungszeitpunkt	$T = 45 \text{ Tage}$	$T = 45 \text{ Tage}$
Ausübungspreis	$K = 95\text{€}$	$K = 90\text{€}$
Volatilität	$\sigma = 0.33$	$\sigma = 0.27$
Erwartete Volatilität	$\sigma = 0.3$	$\sigma = 0.3$
Optionsdelta	$\Delta_A^C = 0.3395$	$\Delta_B^C = 0.5396$

Aktienkurs:  $S_0 = 90\text{€}$

Risikoloser Zinssatz:  $r = 0.04$

Die Calloption, die mit der Volatilität  $\sigma = 0.33$  bewertet wurde, muss bei dieser Strategie verkauft werden, da sie überbewertet ist.

Die Option, bei deren Bewertung die Volatilität  $\sigma = 0.27$  zugrunde gelegt wurde, wird gekauft. Die Anteile der beiden Optionstypen in dem Portfolio wird durch die Hedgerate gegeben:

$$\text{Hedgerate: } H = \frac{0.5396}{0.3395} = 1.589$$

Für 1000 gekaufte Optionen vom Typ B müssen 1583 Optionen vom Typ A verkauft werden. Das Portfolio führt durch seine Konstruktion zu einem Gewinn von 151.30 €. Tabelle 19 zeigt die Wertentwicklung des Portfolios falls die Optionswerte der erwarteten Volatilität angepasst werden.

Aktienkurs	89	90	91
$V_{K=90}^C$ (€)	3.478	3.997	4.557
$V_{K=95}^C$ (€)	1.703	2.023	2.382
Wert von 1000 Calls long (€)	3478	3997	4557
- Wert von 1000 Calls short (€)	2705	3214	3785
Spekulationsgewinn (€)	773	782	772

Tabelle 19: Gewinn des deltaneutralen Optionsportfolios

Wenn die Volatilität angeglichen wird reagiert das Portfolio nur minimal auf Kursschwankungen, da es deltaneutral ist. Es führt aber zu einem Gewinn durch die Preisanpassung der Optionen. Die überbewerteten, verkauften Optionen werden billiger während die unterbewerteten, gekauften Optionen im Preis steigen. Einen zusätzlichen Gewinn erzielt die Strategie am Anfang durch die Konstruktion des Portfolios.

## 5 Asiatische Optionen und ihre Bewertung

Asiatische Optionen gehören zu der Familie der pfadabhängigen Optionen. Das bedeutet, dass ihr Auszahlungswert von dem Werteverlauf ihres Underlyings abhängt. Bei den asiatischen Optionen wird der Mittelwert des Basiswertes während der "Lebensdauer" der Option bestimmt, um daraus die Auszahlungsfunktion abzuleiten. Eine Variante besteht darin, dass sich der Ausübungspreis aus dem Mittelwert  $A(T)$  ergibt. Da der Strikepreis in diesem Fall erst am Ausübungstermin feststeht und vorher nicht bekannt ist, heißen diese Derivate *floating strike Optionen*. In dem anderen Fall ist der Wert des Underlyings durch den Mittelwert  $A(T)$  bestimmt und der Strikepreis fest vorgegeben. Diese Derivate werden *fixed strike Optionen* genannt. Genauso wie die Standardoptionen können die asiatischen Optionen als europäische oder amerikanische Variante gehandelt werden. Die folgenden Auszahlungsfunktionen ergeben sich für die verschiedenen Typen asiatischer Optionen.

- floating strike call:  $G(S(T), A(T), T) = \max(S(T) - A(T), 0)$
- floating strike put:  $G(S(T), A(T), T) = \max(A(T) - S(T), 0)$
- fixed strike call:  $G(S(T), A(T), T) = \max(A(T) - K, 0)$
- fixed strike put:  $G(S(T), A(T), T) = \max(K - A(T), 0)$

Der Mittelwert der Aktien und damit der innere Wert einer asiatischen Option reagiert in der Anfangszeit des Derivates stärker auf Kursänderungen als am Ende der Lebensdauer der Option. Dieses Verhalten überträgt sich auf den Preis der asiatischen Optionen. Ihre Wertentwicklung wird stabiler je näher der Verfallstermin rückt. Auf Grund ihrer Struktur eignen sich asiatische Optionen dafür Zahlungsströme über einen gewissen Zeitraum abzusichern. Das folgende Beispiel von asiatischen Optionen auf Wechselkurse zeigt einen typischen Einsatzbereich dieser Derivate.

**Beispiel 5.1** *Ein deutsches Unternehmen möchte in den USA ein Projekt durchführen, das am 1.1.2001 beginnen soll. Das Projekt dauert ein Jahr und erfordert laufende Kosten in Höhe von 1 Mio. US-Dollar in jedem Quartal. Mit Abschluss des Projektes erhält das Unternehmen nach einem Jahr 5 Mio. US-Dollar. Der aktuelle Wechselkurs liegt bei  $w = 1.09 \frac{\text{€}}{\text{\$}}$ , ein Dollar ist demnach 1.09 €*

wert. Das Währungsrisiko des deutschen Unternehmens besteht darin, dass der Kurs fällt bevor die vereinbarten 5 Mio US-Dollar ausgezahlt und nachdem die laufenden Kosten beglichen wurden. In Tabelle 20 sind die Zahlungsströme des Projektes für einen möglichen Wechselkursverlauf beschrieben. Liegt der Wechselkurs am 31.12.01

Datum	Wechselkurs ( $\frac{\text{€}}{\text{\$}}$ )	Zahlung (\\$)	Zahlungswert (€)
1.1.	1.09	1000000	1090000
1.4.	1.12	1000000	1120000
1.7.	1.13	1000000	1130000
1.11.	1.10	1000000	1100000
Total	1.11	4000000	4440000

Tabelle 20: Zahlungsflüsse des Projektes

unter dem Wechselkurs, mit dem im Durchschnitt die laufenden Kosten gedeckt wurden, so hat der Verlauf des Wechselkurses den Gewinn des Unternehmens reduziert. Das Unternehmen hat die Möglichkeit sich gegen diese Verluste abzusichern, indem es 5 Millionen floating strike Put Optionen auf den US-Dollar kauft. Der Strikepreis der Optionen muss aus dem Mittelwert der Wechselkurse bestimmt werden, die bei den Überweisungen der laufenden Kosten zum Tragen kommen. Bei dem oben beschriebenen Wechselkursverlauf gilt für den Wert einer Option

$$V = \max(1.11 - \text{Wechselkurs am 31.12.01}, 0). \quad (55)$$

Der Gewinn des Unternehmens, der sich für mögliche Wechselkurse am 31.12.01 ergibt ist in Tabelle 21 dargestellt. Liegt der Wechsel-

Wechselkurs 31.12. ( $\frac{\text{€}}{\text{\$}}$ )	Einnahmen (€)	Gewinn ohne Optionen (€)	Wert der Optionen (€)	Total (€)
1.09	5450000	1010000	100000	1110000
1.10	5500000	1060000	50000	1110000
1.11	5550000	1110000	0	1110000
1.12	5600000	1160000	0	1160000

Tabelle 21: Wechselkursvarianten und ihre finanziellen Folgen

kurs bei  $w = 1.09 \frac{\text{€}}{\text{\$}}$ , dann steht einem Gewinn aus dem Projekt von 1 Mio. US-Dollar ein effektiver Betrag von 1010000 € gegenüber. Dieser Betrag würde sich bei einem Wechselkurs von  $w = 1.01 \frac{\text{€}}{\text{\$}}$  ergeben. Durch die Optionen kann der mögliche Wechselkursverlust ausgeglichen und gleichzeitig die Chance auf einen Wechselkursgewinn gewahrt werden.

Normalerweise müsste das Unternehmen die Optionen noch bezahlen, wodurch sich der Gewinn reduziert. Dafür erhält es aber einen sicheren Mindestgewinn aus dem Projekt.

Mit den bisher behandelten Standardoptionen ist diese Absicherung nicht nachzubilden, da sich der Durchschnittswert des Wechselkurses erst am Ende des Projektes ergibt, der Strikepreis der Standardoption aber am Beginn der Laufzeit festgelegt werden muss. Eine Möglichkeit liegt darin, bei jeder Überweisung 1.25 Mio Putoptionen mit dem aktuellen Wechselkurs als Strikepreis zu kaufen, um keinen Verlust zu erzielen. Als Unsicherheit kommen dann aber die unsicheren zukünftigen Optionspreise hinzu. Außerdem erzielt man auf diese Weise keine optimale Hedgestrategie. Auch wenn der Wechselkurs am 31.12.01 dem durchschnittlichen Wechselkurs entspricht führen die Optionen zu einem Gewinn, wie in Tabelle 22 dargestellt ist. Diese Möglichkeit wirkt sich auf die Optionspreise aus. Da das Unternehmen nicht spekulieren, sondern sich nur gegen die Währungsverluste absichern möchte, wählt es die billigeren asiatischen Optionen, die außerdem nur eine Transaktion erfordern.

Wechselkurs am 31.12: $w = 1.10 \frac{\text{€}}{\text{₹}}$	Ausübungspreis ( $\frac{\text{€}}{\text{₹}}$ )	Optionswert (€)	Optionsgewinn (€)
1.Option(1.1.)	1.09	0.02	25000
2.Option(1.4.)	1.12	0	0
3.Option(1.7.)	1.13	0	0
4.Option(1.10.)	1.10	0.01	12500
Total			37500

Tabelle 22: Absicherung des Projektes mit Standardoptionen

In dem Beispiel wird der Mittelwert des Wechselkurses aus den Werten an diskreten Zeitpunkten ermittelt. In diesem Fall spricht man von diskreten asiatischen Optionen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Mittelwert  $A(t)$  kontinuierlich zu bestimmen, dies geschieht bei den kontinuierlichen asiatischen Optionen.

## 5.1 Diskrete asiatische Optionen

Bei diskreten asiatischen Optionen werden die Kurswerte an diskreten Zeitpunkten, zum Beispiel täglich um 12 Uhr, verwendet, um den Durchschnittswert des Aktienkurses zu bestimmen. Diese Termine werden *Beobachtungszeitpunkte* genannt. Für den Durchschnittswert

$A_k$ , der an dem  $k$ -ten Beobachtungstermin ermittelt wird; gilt:

$$A_k = \frac{\sum_{i=0}^k S(t_i)}{k+1} \quad (56)$$

Die diskreten Zeitpunkte  $t_i$  geben dabei die Beobachtungszeitpunkte an.

Bei der Bewertung diskreter asiatischer Optionen muss man die Beobachtungszeitpunkte und die Zeiträume dazwischen getrennt betrachten. Diese Aufteilung ergibt sich dadurch, dass an den diskreten Beobachtungszeitpunkten nur der Mittelwert aktualisiert wird und der Aktienkurs unverändert bleibt während zwischen diesen Terminen der Mittelwert konstant bleibt und sich nur der Aktienkurs ändern kann.

### 5.1.1 Die Optionswertentwicklung zwischen den Beobachtungszeitpunkten

Der Durchschnittswert  $A(t)$  wird nur an den Beobachtungszeitpunkten  $k_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) aktualisiert und ist ansonsten konstant:

$$A(t) = A_k \quad \text{mit} \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (57)$$

$$A(t) = A_n \quad \text{mit} \quad t_n \leq t \leq T \quad (58)$$

Da sich der Wert der Option zwischen den Beobachtungszeitpunkten nur mit dem Aktienkurs und der Zeit ändert, genügt in diesem Zeitraum der Optionswert der Black-Scholes Gleichung,

$$V_t + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} + r S V_S - r V = 0. \quad (59)$$

### 5.1.2 Die Optionswertentwicklung an den Beobachtungszeitpunkten

An den diskreten Beobachtungszeitpunkten wird der Mittelwert des Aktienkurses aktualisiert während der Kurs der Aktie unverändert bleibt. Den neuen Durchschnittswert ermittelt man aus dem aktuellen Aktienkurs und dem alten Durchschnittswert mit der Bedingung:

$$A_k = A_{k-1} + \frac{S(t_k) - A_{k-1}}{k+1} \quad (60)$$

Der Mittelwert  $A_k$  kann schon kurz vor der Aktualisierung bestimmt werden. Dazu betrachtet man den Zeitpunkt  $t_{k-}$ , der so nahe an dem Beobachtungszeitpunkt  $t_k$  liegt, dass sich der Aktienkurs in dieser kurzen Zeitspanne nicht mehr ändert,  $S(t_{k-}) = S(t_k)$ . Aus dem Aktienkurs und dem alten Mittelwert kann der zukünftige Mittelwert

bestimmt werden. Man kennt daher unmittelbar vor dem Beobachtungszeitpunkt alle für den neuen Optionspreis relevanten Werte. Würde die Option teurer werden, könnte man sie vor der Aktualisierung kaufen und einen sicheren Gewinn erzielen. Würde sich der Preis der Option am Beobachtungszeitpunkt verringern, müßte man sie kurz vorher verkaufen, um zu einem sicheren Gewinn zu kommen. Aus Arbitragegründen darf die Option ihren Wert durch die Aktualisierung also nicht mehr ändern. Diese Tatsache wird mit der Stetigkeitsbedingung gefordert:

$$V(S(t_{k-}), A_{k-1}, t_{k-}) = V(S(t_{k+}), A_k, t_{k+}) \quad (61)$$

Die Bedingungen (60) und (61) werden als *Sprungbedingung* bezeichnet (vergleiche [36], [37], [11]). Sie sorgen dafür, dass sich in einem sehr kleinen Zeitintervall, das den Beobachtungszeitpunkt umschließt, der Optionswert durch die Aktualisierung des Mittelwertes nicht ändert.

### 5.1.3 Die Bewertung diskreter asiatischer Optionen

Der Wert einer asiatischen Option an einem festen Zeitpunkt  $t$  hängt sowohl von dem aktuellen wie auch von dem mittleren Kurs der Aktie ab. Damit ergibt sich für die Wertfunktion nicht wie bei den Standardoptionen eine Lösungskurve sondern eine zweidimensionale Lösungsfläche über der S-A-Ebene. Da keine unendlich großen Aktienkurse oder Mittelwerte zu erwarten sind, wird die Lösung auf den Bereich  $0 \leq S \leq S^{max}$  und  $0 \leq A \leq A^{max}$  eingeschränkt wobei  $S^{max}$  und  $A^{max}$  so gewählt werden, dass der durch die Einschränkung resultierende Fehler möglichst klein bleibt.

Die Bewertung diskreter asiatischer Optionen erfolgt durch die Lösung von aufeinander folgenden Endwertproblemen. Die erste Endwertaufgabe besitzt als Endbedingung die Auszahlungsfunktion der Option. Die Aufgabe wird bis zu dem nächsten Beobachtungszeitpunkt gelöst. Mit der Sprungbedingung (62), (63) können dann die Optionswerte für den Zeitpunkt  $t_{k-}$  kurz vor dem Beobachtungstermin  $t_k$  bestimmt werden.

$$A(t_{k-}) = A_{k-1} = A_k + \frac{A_k - S(t_k)}{k} \quad (62)$$

$$V(S(t_{k-}), A_{k-1}, t_{k-}) = V(S(t_k), A_k, t_k) \quad (63)$$

Da sich der Aktienkurs nicht ändert und nur der Mittelwert neu bestimmt wird, verschiebt die Sprungbedingung (63) die Optionswerte parallel zur  $A$ -Achse von der Diagonalen aus nach außen (siehe Abb. 29). Die neuen Optionswerte stellen die Endbedingung der

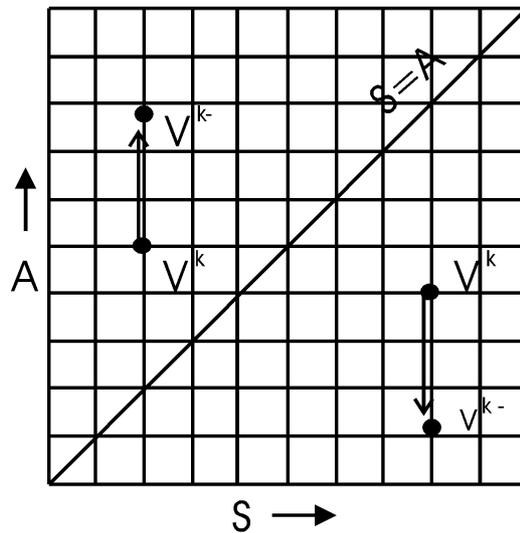


Abbildung 29: Die Sprungbedingung bewirkt, dass die Optionswerte von der Diagonalen aus parallel zur  $A$ -Achse nach außen verschoben werden

nächsten Endwertaufgabe dar. Diese wird wiederum bis zum vorherigen Beobachtungstermin gelöst und liefert die Endbedingung für die nachfolgende Endwertaufgabe.

- Die erste Endbedingung ist durch die Auszahlungsfunktion gegeben

$$V(S(T), A(T), T) = G(S(T), A(T), T) \quad (64)$$

- Die übrigen Endbedingungen ergeben sich mit der Sprungbedingung aus den Optionswerten an den Beobachtungszeitpunkt  $t_k$  ( $k = n, \dots, 1$ )

$$\begin{aligned} V(S(t_{k-}), A(t_{k-}), t_{k-}) &= V(S(t_k), A_k, t_k) \\ \text{mit } S(t_{k-}) &= S(t_k), A(t_{k-}) = A_{k-1} \end{aligned} \quad (65)$$

Außerhalb der Beobachtungstermine bleibt der Mittelwert der Aktie konstant und der Optionswert erfüllt die Black-Scholes-Gleichung. Da für jeden möglichen Mittelwert  $A \in [0, A^{max}]$  diese partielle Differentialgleichung gelöst werden muss, besteht jedes Endwertproblem aus einem System von unabhängigen Black-Scholes Gleichun-

gen,

$$V_t^A + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}^A + rSV_S^A - rV^A = 0 \quad (66)$$

$$A \in [0, A^{max}] .$$

Randbedingungen werden nur für den Fall  $S = 0$  und  $S = S^{max}$  benötigt, da zwischen den Beobachtungszeitpunkten in  $A$ -Richtung keine Informationen fließen. Die Endrandbedingungen ergeben sich jeweils aus den Endbedingungen und damit aus den mit der Sprungbedingung ermittelten Werten.

- Zum Zeitpunkt  $t = T$  gilt für

–  $S = 0$ :

$$V(0, A(T), T) = G(0, A(T), T) \quad (67)$$

$$A(T) \in [0, A^{max}]$$

–  $S = S^{max}$  :

$$V(S^{max}, A(T), T) = G(S^{max}, A(T), T) \quad (68)$$

$$A(T) \in [0, A^{max}]$$

- Aus den Beobachtungszeitpunkten  $t = t_k$  ,  $k = n, \dots, 1$  ergibt sich für

–  $S = 0$ :

$$V(0, A(t_{k-}), t_{k-}) = V(0, A_k, t_k) \quad (69)$$

$$A(t_{k-}) \in [0, A^{max}]$$

–  $S = S^{max}$ :

$$V(S^{max}, A(t_{k-}), t_{k-}) = V(S^{max}, A_k, t_k) \quad (70)$$

$$A(t_{k-}) \in [0, A^{max}]$$

Für  $S = 0$  reduziert sich die Black-Scholes-Gleichung zu der Differentialgleichung

$$V_t = -rV . \quad (71)$$

Mit dieser Differentialgleichung werden zwischen den Beobachtungszeitpunkten die Randwerte für  $S = 0$  bestimmt. Über das

Verhalten des Randes bei  $S = S^{max}$  gibt es keine genauen Informationen (vergleiche [37]), daher lässt man ihn zunächst unverändert und aktualisiert die Werte erst an den Beobachtungsterminen mit der Sprungbedingung. Um die Ungenauigkeit, die dadurch entsteht, auszugleichen muss  $S^{max}$  ausreichend groß gewählt werden. Der 2- bis 3-fache Wert des betrachteten Aktienkurses  $S_0$  beziehungsweise des Ausübungspreises reicht nach [37] und [38] aus. Über die aufeinanderfolgenden Endwertaufgaben erhält man den aktuellen Optionswert  $V(S_0, A_0, 0)$ .

## 5.2 Kontinuierliche asiatische Optionen

Bei den kontinuierlichen asiatischen Optionen wird der Mittelwert der Aktie  $A(t)$  kontinuierlich ermittelt. Dafür kann entweder das arithmetische oder das geometrische Mittel verwendet werden. Im Folgenden wird mit dem arithmetischen Durchschnittswert des Aktienkurses  $A(t)$  gearbeitet:

$$A^t = \frac{\int_0^t S(\tau) d\tau}{t} \quad (72)$$

Für das Änderungsverhalten des Mittelwertes gilt:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{S(t)t - \int_0^t S(\tau) d\tau}{t^2} = \frac{(S(t) - A(t))}{t} \quad (73)$$

Da sich der Mittelwert der Aktie kontinuierlich ändert und ständig Einfluss auf den Wert der Option nimmt, muss auch die Sprungbedingung kontinuierlich erfüllt werden. Das bedeutet, dass in sehr kleinen Zeitintervallen  $dt$ , in denen sich der Aktienkurs nicht ändert (74), der Mittelwert aber aktualisiert wird (75), der Optionswert unverändert bleibt (76).

$$\frac{dS(t)}{dt} = 0 \quad (74)$$

$$A^{neu} = A^{alt} + \frac{(S(t) - A^{alt})}{t} \quad (75)$$

$$\frac{DV(S(t), A(t), t)}{Dt} = 0 \quad (76)$$

Für die Änderung des Optionswertes in der Zeit gilt:

$$\frac{DV(S(t), A(t), t)}{Dt} = \frac{dV}{dS} \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dA} \frac{dA}{dt} + \frac{dV}{dt} \quad (77)$$

wegen (74) und (76) gilt:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dA} \frac{dA}{dt} = 0 \quad (78)$$

Mit (73) ergibt sich für die Sprungbedingung im kontinuierlichen Fall:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dA} \frac{(S - A)}{t} = 0 \quad (79)$$

Für die Bewertung asiatischer Optionen, die von dem Aktienkurs  $S$  und dem Mittelwert  $A$  kontinuierlich abhängen, erhält man die zweidimensionale partielle Differentialgleichung

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + r S V_S + \frac{S - A}{t} V_A - r V = 0. \quad (80)$$

Die partielle Differentialgleichung (80) setzt sich aus der Black-Scholes-Gleichung und dem Konvektionsterm  $\frac{S-A}{t} V_A$  in die  $A$ -Richtung zusammen. Der Konvektionsterm sorgt dafür, dass die Sprungbedingung kontinuierlich erfüllt wird.

Wie bei den Standardoptionen wird diese Differentialgleichung zu einer Ungleichung,

$$V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS} + r S V_S + \frac{S - A}{t} V_A - r V \leq 0, \quad (81)$$

wenn man asiatische Optionen vom amerikanischen Typ betrachtet. Für floating strike Optionen vom europäischen und amerikanischen Typ und für fixed strike Optionen vom europäischen Typ existieren neben der zweidimensionalen partiellen Differentialgleichung (80) zusätzlich noch eindimensionale partielle Differentialgleichungen (siehe [39]). Diese können mit relativ wenig Rechenaufwand gelöst werden. Um jedoch fixed strike Optionen vom amerikanischen Typ bewerten zu können muss man mit der zweidimensionalen partiellen Differentialgleichung (81) arbeiten.

Da alle vier Typen der asiatischen Optionen als europäische und amerikanische Variante bewertet werden sollen, wird in dieser Arbeit das zweidimensionale Problem behandelt.

Da für die Black-Scholes-Gleichung eine analytische Lösung existiert, bietet es sich an mit der numerischen Lösung dieser partiellen Differentialgleichung zu beginnen. Die analytische Lösung kann als Vergleichsgrundlage verwendet werden, um die passenden Diskretisierungen für den Zeit-, den Konvektions- und den Diffusionsterm zu finden.

Nach der Behandlung der europäischen Standardoptionen wird die amerikanische Variante betrachtet. Bei der numerischen Lösung der Black-Scholes-Ungleichung für diesen Optionstyp entsteht ein freies Randwertproblem, das als lineares Komplementaritätsproblem mit dem Projektionsalgorithmus von Cryer gelöst werden kann. Auch dieser Schritt dient als Vorbereitung für die Bewertung asiatischer Optionen, da bei den asiatischen Optionen vom amerikanischen Typ ebenfalls ein End-Randwertproblem mit einem freien Rand entsteht.

Mit einem Mehrgitterverfahren wird dann ein schnelles Lösungsverfahren angewendet, um die Black-Scholes-Gleichung und Ungleichung zu lösen.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden abschließend auf die zweidimensionale partielle Differentialgleichung und Differentialungleichung übertragen, um die asiatischen Optionen vom europäischen und amerikanischen Typ lösen zu können.

## 6 Numerische Bewertung der Standardoptionen

In Abschnitt 3.3.3 wurde die End-Randwertaufgabe beschrieben, mit der europäischer Optionen bewertet werden können. Der Zeitparameter  $t$  läuft bei dieser Problemstellung von dem Ausübungszeitpunkt  $t = T$  zum Anfangszeitpunkt  $t = 0$  ( $t : [T, 0]$ ). Durch die Einführung eines neuen Zeitparameters  $t^* = T - t$  kann die Black-Scholes-Gleichung in eine vorwärts gerichtete partielle Differentialgleichung übergeführt werden ( $t^* : [0, T]$ ). Damit wird die Auszahlungsfunktion zur Anfangsbedingung und man erhält die folgende Anfangs-Randwertaufgabe (vergleiche [39]):

partielle Differentialgleichung

$$V_t^* = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V^{SS} + rSV_S - rV \quad (82)$$

Die Anfangsbedingung für einen

$$\text{Call: } V^C(0) = \max(S(0) - K, 0) \quad (83)$$

$$\text{Put: } V^P(0) = \max(K - S(0), 0) \quad (84)$$

Die Randbedingungen für einen

$$\text{Call: } V^C(0, t^*) = 0 \quad (85)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V^C(S, t^*) = (S - K \exp(-rt^*)) \quad (86)$$

Die Randbedingungen für einen

$$\text{Put: } V^P(0, t^*) = K \exp(-rt^*) \quad (87)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} V^P(S, t^*) = 0 \quad (88)$$

Im Folgenden wird der neue Zeitparameter  $t^*$  mit  $t$  bezeichnet.

### 6.1 Die Diskretisierung der Black-Scholes-Gleichung

Bei der Black-Scholes-Gleichung (89) handelt es sich um eine Konvektions-Diffusions-Gleichung. Der Diffusionsterm wird durch den Faktor  $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2$  bestimmt. Damit ist die Gleichung konvektionsdominant, wenn die Volatilität  $\sigma$  der betrachteten Aktie sehr kleine Werte annimmt. Der Konvektionsterm ist durch den Faktor  $-rS$

bestimmt. Dieser Term gibt die "Geschwindigkeit" an, mit der die Informationen verbreitet werden. Da sowohl der risikolose Zinssatz  $r$  wie auch der Aktienkurs  $S$  nie negativ sind, fließen die Informationen von dem rechten Rand  $S^{max}$  in den zu berechnenden Bereich hinein.

$$V_t = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - (-rS)V_S - rV \quad (89)$$

Die partielle Differentialgleichung für kontinuierliche asiatische Optionen (90) besitzt in die A-Richtung keinen Diffusionsterm, ist also konvektionsdominant in diese Richtung.

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S + \frac{S-A}{t}V_A - rV = 0 \quad (90)$$

Dadurch können bei der numerischen Lösung Schwierigkeiten entstehen. Um auf dieses Problem vorbereitet zu sein wird schon bei der Behandlung der europäischen Optionen eine Volatilität gewählt, bei der die Black-Scholes-Gleichung konvektionsdominant ist. Die Volatilität  $\sigma = 0.01$  erfüllt diesen Zweck.

Die Black-Scholes-Gleichung besteht aus einem Zeitterm ( $T(V,t)$ ), einem Diffusions- ( $D(V,t)$ ) und Konvektionsterm ( $K(V,t)$ ) und einem Reaktionsterm ( $R(V,t)$ ):

$$T(V,t) = D(V,t) + K(V,t) - R(V,t) \quad (91)$$

Diese partielle Differentialgleichung kann mit einem finite Volumen-, einem finite Elemente- oder einem finite Differenzenansatz diskretisiert werden. Im Folgenden wird mit der finite Volumen-Diskretisierung gearbeitet.

### 6.1.1 Die Zeitdiskretisierung

**Das implizite BDF2-Verfahren** Bei Differentialgleichungen mit einem Diffusionsterm eignet sich für die Zeitdiskretisierung das implizite BDF2-Verfahren (92). Es besitzt eine starke innere Dämpfung und ist für Diffusionsprobleme A-Stabil (vergleiche [22]).

$$\frac{3}{2}V^n - 2V^{n-1} + \frac{1}{2}V^{n-2} = \tau D(t_n, V^n) + \tau K(t_n, V^n) - \tau R(t_n, V^n) \quad (92)$$

$$n \geq 2$$

Für Konvektionsprobleme weist das implizite BDF2-Verfahren jedoch Nachteile auf. Hundsdorfer hat in [22] gezeigt, dass diese impliziten Verfahren ungünstige Monotonieeigenschaften in Form einer

kleinen CFL-Bedingung besitzen. In der Abbildung 30 kann man erkennen, dass die Monotoniebedingung des Verfahrens durch die gewählten Schrittweiten verletzt wurde. Die approximierte Lösung schießt in der Nähe des Ausübungswertes etwas über die analytische Lösung hinaus. Dadurch entsteht die "kleine" Spitze in der Deltafunktion, die sich in den negativen Werten der Gammafunktion widerspiegelt. Es sei daran erinnert, dass mit der ersten Ableitung das Optionsdelta und mit der zweiten Ableitung das Gamma der Option angegeben wird und dass die Genauigkeit dieser Werte eine große Bedeutung in der Praxis besitzt.

Die Schrittweite für den Aktienkurs wurde mit  $\delta S = 0.0125$  sehr klein gewählt, um eine möglichst genaue Approximation der Lösung zu erhalten und nur den Einfluß der CFL-Bedingung betrachten zu können.

**Das Explizite BDF2-Verfahren** Bei dem expliziten BDF2-Verfahren wird mit Werten gearbeitet, die aus den beiden vorherigen Zeitschritten extrapoliert werden.

$$\bar{V}^n = 2V^{n-1} - V^{n-2} \quad (93)$$

Nach Hundsdorfer (siehe [22]) eignet sich dieses Verfahren für die Behandlung von Konvektionsproblemen. Da sich für Diffusionsprobleme die implizite Behandlung besser eignet, werden bei dem hier betrachteten expliziten BDF2-Verfahrens (94) die extrapolierten Werte nur bei dem Konvektionsterm verwendet. Der Diffusionsterm und der Reaktionsterm werden implizit behandelt.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}V^n - 2V^{n-1} + \frac{1}{2}V^{n-2} &= \tau D(t_n, V^n) + \tau K(t_n, \bar{V}^n) - \tau R(t_n, V^n) \quad (94) \\ \bar{V}^n &= 2V^{n-1} - V^{n-2} \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Die Stabilität des expliziten Verfahrens ist durch eine CFL-Bedingung eingeschränkt. Löst man das Anfangs-Randwertproblem mit dem expliziten Verfahren, dann erhält man eine instabile Lösung wenn die CFL-Bedingung verletzt ist. Dieser Fall tritt bei den Schrittweiten ein, die in dem vorherigen Beispiel verwendet wurden, wie in Abbildung 31 gezeigt wird.

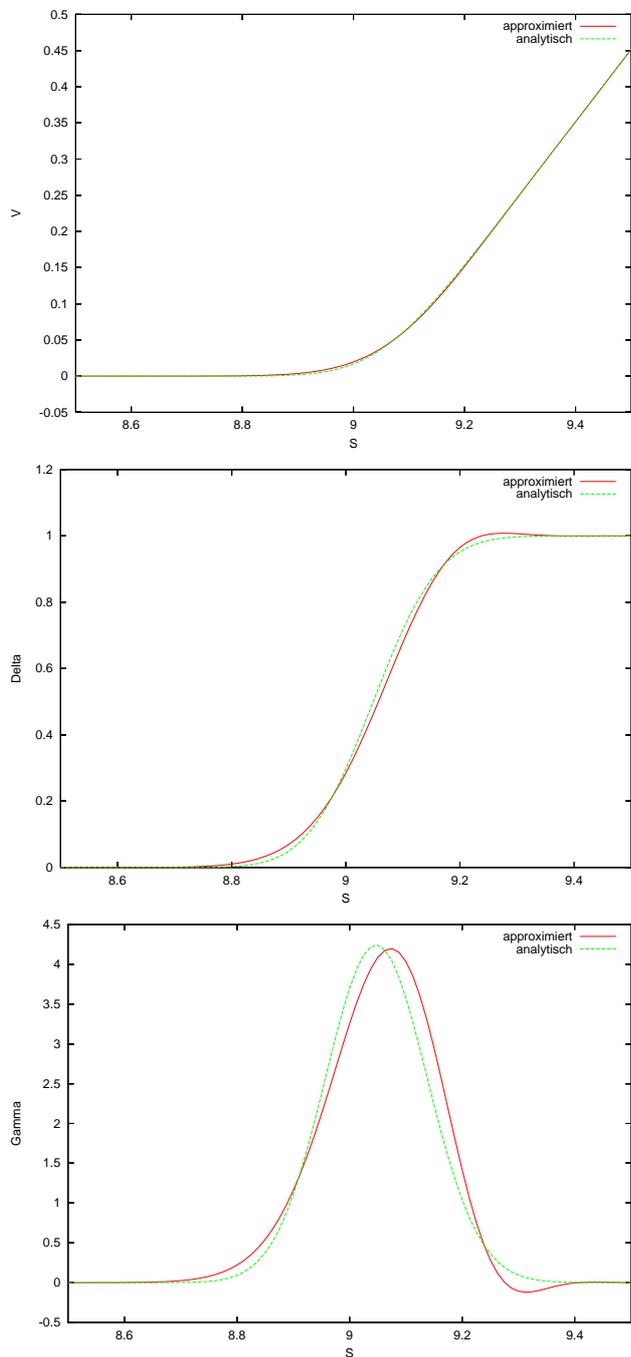


Abbildung 30: Der Wert  $V$ , die Deltafunktion und die Gammafunktion für einen europäischen Call mit der Laufzeit  $T=1$  Jahr, dem Ausübungspreis  $K = 10$  €, der Volatilität  $\sigma = 0.01$  und dem risikolosen Zinssatz  $r = 0.1$ . Für die Bewertung wurde das implizite BDF2-Verfahren mit  $\delta S = 0.0125$  und  $\delta t = 0.02$  verwendet.

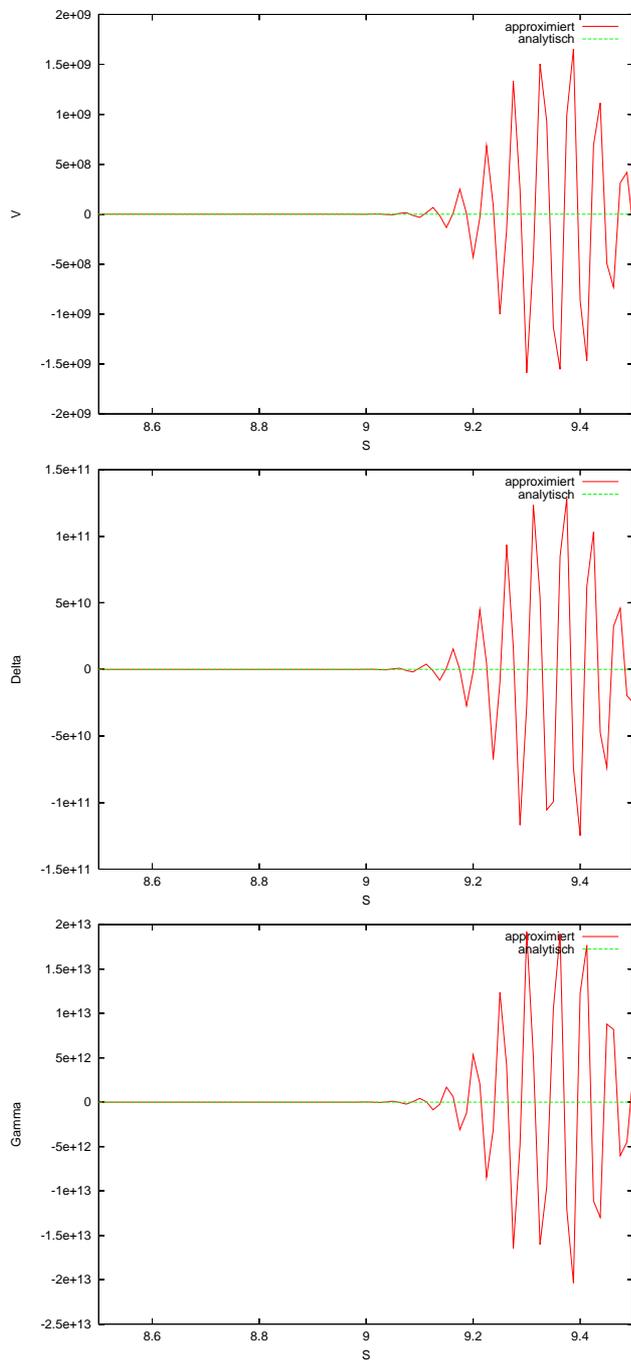


Abbildung 31: Der Wert  $V$ , die Deltafunktion und die Gammafunktion für einen europäischen Call mit der Laufzeit  $T=1$  Jahr, dem Ausübungspreis  $K = 10$  €, der Volatilität  $\sigma = 0.01$  und dem risikolosen Zinssatz  $r = 0.1$ . Für die Bewertung wurde das explizite BDF2-Verfahren mit  $\delta S = 0.0125$  und  $\delta t = 0.02$  verwendet.

**Das  $\theta$ -BDF2-Verfahren** Bessere Stabilität und gute Monotonieeigenschaften findet man in dem  $\theta$ -BDF2-Verfahren

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}V^n - 2V^{n-1} + \frac{1}{2}V^{n-2} &= \tau D(t_n, V^n) + \tau K(t_n, \theta V^n + (1 - \theta)\bar{V}^n) \\ &\quad - \tau R(t_n, V^n) \\ \bar{V}^n &= 2V^{n-1} - V^{n-2}, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (95)$$

Der Parameter  $\theta$  bestimmt dabei die Gewichtung der impliziten und der expliziten Teile des Konvektionsterm. Der Diffusions- und der Reaktionsterm werden implizit behandelt.

Nach Hundsdorfer (siehe [22], [21]) besitzt das Verfahren bei der Wahl von  $\theta = 0.75$  die größte CFL-Bedingung bezüglich der Monotonie, falls der Konvektionsterm mit einer  $\kappa$ -Diskretisierung diskretisiert wird (siehe [25]). Experimentell konnte er dieses Ergebnis für den Fall bestätigen, in dem zusätzlich der van Leer Limiter (siehe [18]) verwendet wurde. Außerdem ist für Konvektions-Diffusionsprobleme das  $\theta$ -BDF2-Verfahren uneingeschränkt stabil wenn  $\theta \geq 0.75$  gewählt wird.

Das explizite-BDF2-Verfahren benötigt den geringsten Rechenaufwand und ist damit bei der Behandlung der Black-Scholes-Gleichung zu bevorzugen, wenn seine Stabilität gewährleistet ist. Ist das nicht der Fall, so lassen die Ergebnisse von Hundsdorfer vermuten, daß das implizit-explizite BDF2 Schema mit  $\theta = 0.75$  die geeignete Wahl ist.

Diese Vermutung wird durch die Ergebnisse, die in Abbildung 32 dargestellt sind, bestätigt.

Wählt man das  $\theta$ -BDF2-Schema mit  $\theta = 0.75$ , so "schießt" die Approximation, auf Grund des monotonen Verhaltens des Lösungsverfahrens, weder über die Lösung hinaus noch besitzt sie Oszillationen, da das Verfahren stabil ist. Dieses Ergebnis wird besonders deutlich, wenn man die Gammafunktion betrachtet, die keine Oszillationen mehr besitzt.

Eigenschaften des  $\theta$ -BDF2 Verfahrens:

- A-stabil für  $\theta \geq 0.75$  (keine CFL-Bedingung)
- Für  $\theta = 0.75$  beste Monotonieeigenschaften (größte CFL-Bedingung)
- Ordnung 2 für beliebige  $\theta$

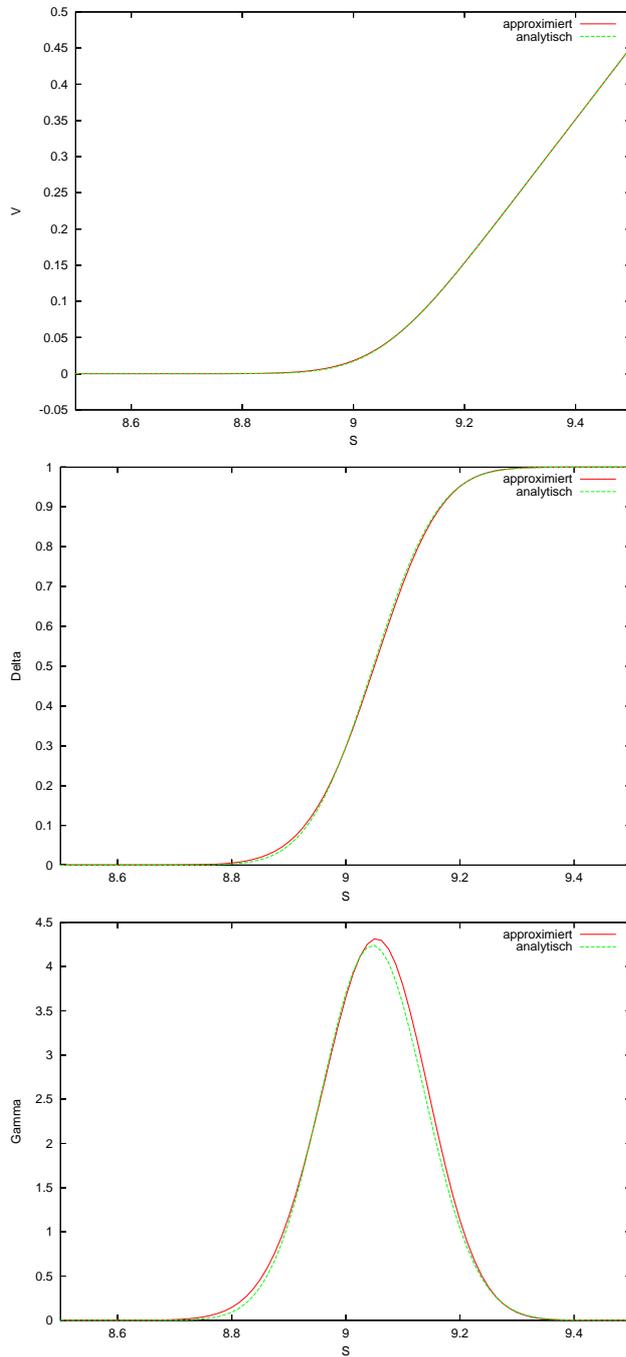


Abbildung 32: Der Wert  $V$ , die Deltafunktion und die Gammafunktion für einen europäischen Call mit der Laufzeit  $T=1$  Jahr, dem Ausübungspreis  $K = 10$  €, der Volatilität  $\sigma = 0.01$  und dem risikolosen Zinssatz  $r = 0.1$ . Für die Bewertung wurde das  $\theta$ -BDF-Verfahren mit  $\theta = 0.75$  und  $\delta S = 0.0125$  und  $\delta t = 0.02$  verwendet.

### 6.1.2 Die Raumdiskretisierung

Während bei den Standardoptionen der Raum nur durch den Aktienkurs bestimmt ist betrachtet man bei den asiatischen Optionen einen zweidimensionalen Raum, der zusätzlich den Mittelwert des Kurses berücksichtigt. Die Lösungsbereiche werden durch einen maximalen Aktienkurs  $S^{max}$  beziehungsweise durch einen maximalen Mittelwert  $A^{max}$  begrenzt, wobei für die asiatischen Optionen ein quadratischer Lösungsbereich mit  $S^{max} = A^{max}$  gewählt wird. Durch die Diskretisierung wird dieser Lösungsbereich  $\Omega$  in ein Gitter  $\Omega_h$  (96) übergeführt, das in dem hier betrachteten Fall äquidistante Intervalllängen in alle Raumrichtungen besitzt. Die Intervalllänge  $h$  des Gitters in eine Raumrichtung ergibt sich aus der Anzahl  $n$  der Intervalle in diese Richtung (97). Auf dem Gitter  $\Omega_h$  liefert die Gitterfunktion  $V_h$  die diskrete Lösung der kontinuierlichen Aufgabe.

$$\Omega_h = \{(x, y) | x = i \cdot h, y = j \cdot h, i, j \in \mathbb{Z}\} \quad (96)$$

$$h = \frac{(S^{max} - S_0)}{n} = \frac{(A^{max} - A_0)}{n} \quad (97)$$

**Stencil Notation** Für die Definition der Diskretisierungsoperatoren wird im weiteren Verlauf häufig die Stencilnotation (vergleiche [33]) verwendet, die sehr übersichtlich die Beziehungen der benachbarten Gitterwerte angibt. Da es für diese Arbeit ausreicht wird nur der zweidimensionale Fall betrachtet.

Ein allgemeiner Stencil  $[s_{k_1 k_2}]_h$  für ein unendliches Gitter  $\Omega_h$  wird folgendermaßen dargestellt:

$$[s_{k_1 k_2}]_h = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & s_{-1,1} & s_{0,1} & s_{1,1} & \dots \\ \dots & s_{-1,0} & s_{0,0} & s_{1,0} & \dots \\ \dots & s_{-1,-1} & s_{0,-1} & s_{1,-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}_h \quad (98)$$

Dieser Stencil definiert einen Operator für die Gitterfunktion  $V_h$  durch:

$$[s_{k_1 k_2}]_h V(x, y) = \sum_{k_1, k_2} s_{k_1, k_2} V(x + k_1 h_x, y + k_2 h_y) \quad (99)$$

In der Regel kann man davon ausgehen, dass nur endlich viele der Koeffizienten  $s_{k_1, k_2}$  nicht Null sind und es ausreicht nur diese anzu-

geben. In dieser Arbeit wird auf Grund der gewählten Diskretisierungen in dem eindimensionalen Fall mit dem 3-Punkt-Stencil und in dem zweidimensionalen Fall mit dem 5-Punkt-Stencil gearbeitet.

$$\left[ \begin{array}{ccc} s_{-1,0} & \underline{s_{0,0}} & s_{1,0} \end{array} \right]_h, \quad \left[ \begin{array}{ccc} & s_{0,1} & \\ s_{-1,0} & \underline{s_{0,0}} & s_{1,0} \\ & s_{0,-1} & \end{array} \right]_h \quad (100)$$

**Diffusionsterm** Für den Diffusionsterm wird eine Diskretisierung zweiter Ordnung gewählt,

$$V_{SS} = \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{h^2} \quad \left( \frac{1}{h^2} [1 \quad \underline{-2} \quad 1]_h V_h \right). \quad (101)$$

**Konvektionsterm** In Abschnitt 4.2.3 wurden die Probleme angesprochen, die auftreten können, wenn beim Deltahedgen falsche Werte verwendet werden. Es ist daher sehr wichtig eine Diskretisierung zu finden, die zu einer guten Approximation für die Lösung der Black-Scholes-Gleichung führt und so auch die erste und zweite Ableitung möglichst genau widerspiegelt. Der folgende Vergleich zeigt, dass die Diskretisierung des Konvektionsterms mit der upwind-Diskretisierung-zweiter-Ordnung und der Verwendung des van Leer Limiters zu geeigneten Ergebnissen führt.

**Zentrale-Differenzen-Diskretisierung** Die Diskretisierung des Konvektionsterms mit "zentralen-Differenzen",

$$V_S = \frac{V_{i+1} - V_{i-1}}{2h} \quad \left( \frac{1}{2h} [-1 \quad \underline{0} \quad 1]_h V_h \right) \quad (102)$$

besitzt die gewünschte Ordnung zwei. Diese Diskretisierung eignet sich aber nicht für konvektionsdominante Probleme. In [39] wurde gezeigt, dass in dem hier betrachteten Fall durch die Péclet Bedingung (103) eine sehr kleine Raumschrittweite gefordert wird, um Oszillationen zu vermeiden.

$$\text{Péclet Bedingung:} \quad 1 > \frac{rh_S}{\sigma^2 S} \quad (103)$$

Die Abbildung 33 zeigt die Probleme, die auftreten, wenn die Péclet Bedingung nicht eingehalten wird. Die Approximation gibt den Preis des Calls noch relativ gut wieder, besitzt jedoch geringe Oszillationen. Diese zeigen sich besonders deutlich in der ersten und zweiten Ableitung, wodurch diese Werte zum Deltahedgen unbrauchbar sind.

**Erste-Ordnung-Upwind-Diskretisierung** Der risikolose Zinssatz  $r$  und der Aktienkurs  $S$  sind nie kleiner als Null, wodurch die Flußrichtung des Konvektionsterms " $-rS$ " immer negativ ist.

Im weiteren Verlauf wird die Fluggeschwindigkeit mit  $a = -rS < 0$  abgekürzt. Für die Upwind-Diskretisierung erster Ordnung gilt:

$$aV_S = a \frac{V_{i+1} - V_i}{h} \quad \left( \frac{a}{h} [0 \quad \underline{-1} \quad 1]_h V_h \right) \quad (104)$$

Diese Diskretisierung führt zu einer oszillationsfreien Lösung, wie die Abbildung 34 zeigt. Sie besitzt aber nur die Ordnung Eins und das Ergebnis ist genauso wenig zufriedenstellend wie das vorherige, das mit der zentralen Diskretisierung erreicht wurde. Die Upwind-Diskretisierung erster Ordnung ist zu diffusiv, wodurch die Lösung "ausschmiert" und zu unbrauchbaren Ergebnissen führt. Dieses Resultat wird besonders deutlich, wenn man die Delta- und die Gammafunktion betrachtet.

Die Upwind-Diskretisierung erster Ordnung kann als eine Kombination aus einem zentralen Differenzterm und einem künstlichen Diffusionsterm betrachtet werden (vergleiche [33]).

$$\frac{a}{h} [0 \quad \underline{-1} \quad 1]_h V_h = \frac{a}{2h} [-1 \quad \underline{0} \quad 1]_h V_h - \frac{a}{2h} [-1 \quad \underline{2} \quad -1]_h V_h \quad (105)$$

**Zweite-Ordnung-Upwind-Diskretisierung mit van Leer Limiter** Eine Diskretisierung höherer Ordnung, die weder Oszillationen liefert noch ausschmiert, erhält man mit der Zweiten-Ordnung-Upwind-Diskretisierung mit der Verwendung des van Leer Limiters (siehe [18]).

Die herkömmliche Zweite-Ordnung-Upwind-Diskretisierung (106) produziert ähnlich wie die zentrale Diskretisierung ungewünschte Oszillationen für  $a < 0$ . Die Oszillationen sieht man in Abbildung 35.

$$aV_S = \frac{a}{h_S} \left( -\frac{3}{2}V_i + 2V_{i+1} - \frac{1}{2}V_{i+2} \right) \quad \left( \frac{a}{h_S} [0 \quad \underline{-\frac{3}{2}} \quad 2 \quad -\frac{1}{2}]_h V_h \right) \quad (106)$$

Durch die Hinzunahme des van Leer Limiters erhält man ein Schema (107), das in der Kombination mit der entsprechenden Zeitdiskretisierung die *TVD* (total variation diminishing) Eigenschaft besitzt.

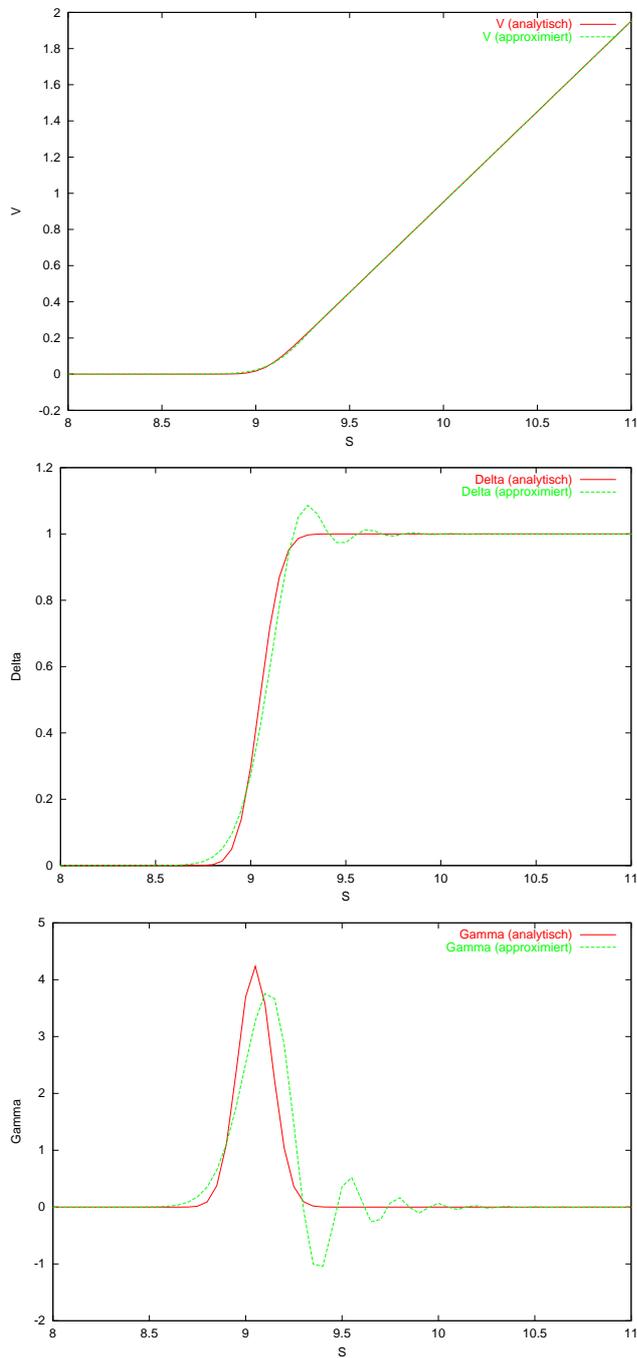


Abbildung 33: Der Wert  $V$ , die Deltafunktion und die Gammafunktion für einen europäischen Call mit der Laufzeit  $T=1$  Jahr, dem Ausübungspreis  $K = 10$  €, der Volatilität  $\sigma = 0.01$  und dem risikolosen Zinssatz  $r = 0.1$ . Für die Bewertung wurde die Zentrale-Differenzen-Diskretisierung und  $\delta S = 0.05$  und  $\delta t = 0.005$  gewählt.

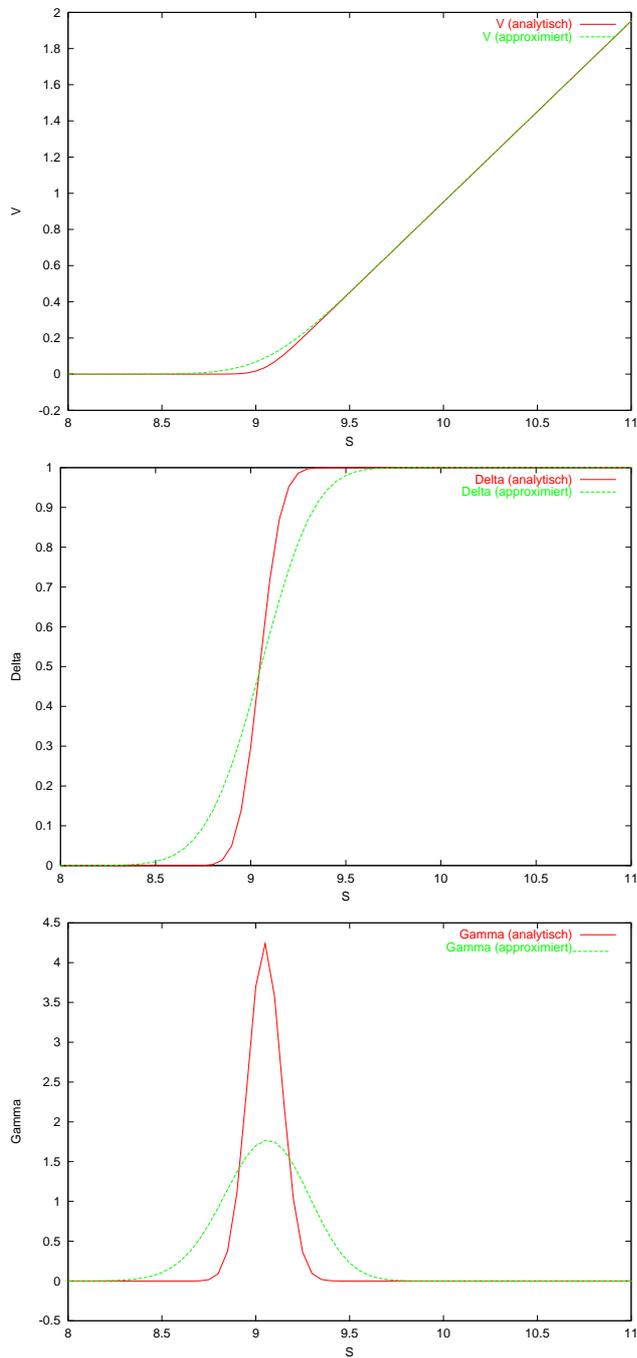


Abbildung 34: Der Wert  $V$ , die Deltafunktion und die Gammafunktion für einen europäischen Call mit der Laufzeit  $T=1$  Jahr, dem Ausübungspreis  $K = 10$  €, der Volatilität  $\sigma = 0.01$  und dem risikolosen Zinssatz  $r = 0.1$ . Für die Bewertung wurde die Upwind-Diskretisierung erster Ordnung und  $\delta S = 0.05$  und  $\delta t = 0.005$  gewählt.

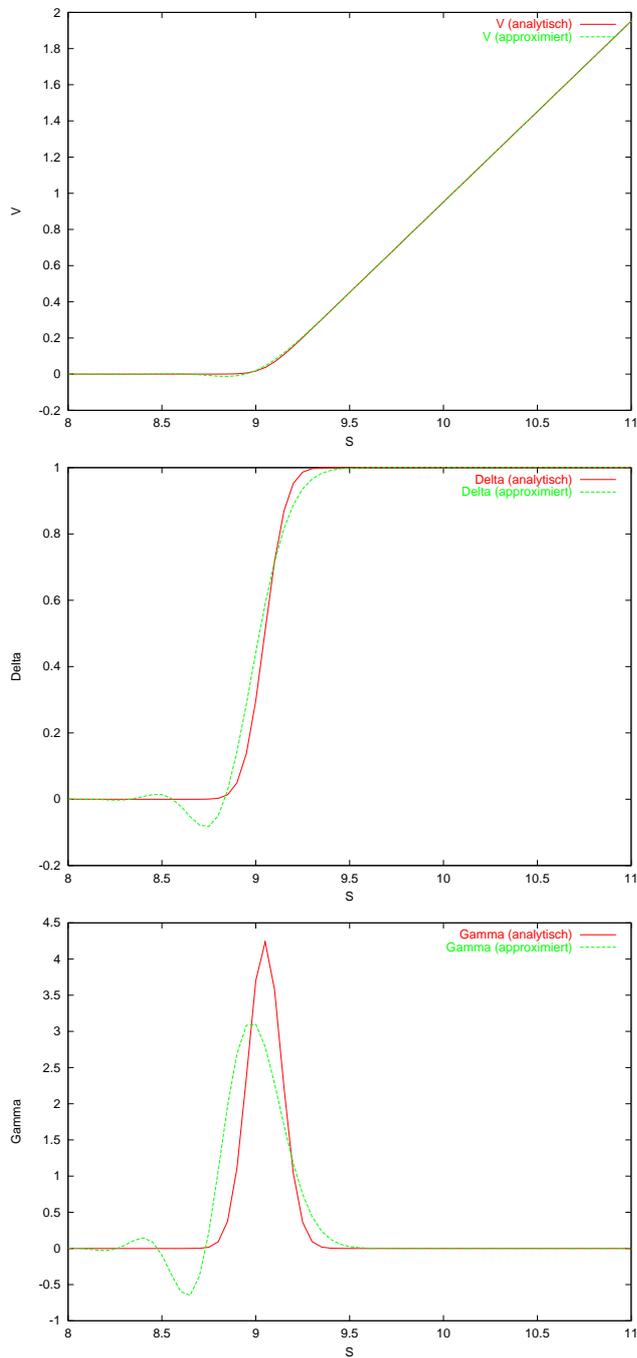


Abbildung 35: Der Wert  $V$ , die Deltafunktion und die Gammafunktion für einen europäischen Call mit der Laufzeit  $T=1$  Jahr, dem Ausübungspreis  $K = 10$  €, der Volatilität  $\sigma = 0.01$  und dem risikolosen Zinssatz  $r = 0.1$ . Für die Bewertung wurde die Zweite-Ordnung-Upwind-Diskretisierung und  $\delta S = 0.05$  und  $\delta t = 0.005$  gewählt.

Diese garantiert, dass beim iterativen Lösen keine Oszillationen entstehen (vergleiche [33], [39]).

Die Diskretisierung sieht wie folgt aus:

$$aV_S = \frac{a}{h_S}(V_{i+1} - V_i) + \frac{a}{2h_S}(V_{i+1} - V_i)\psi(q_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{a}{2h_S}(V_{i+2} - V_{i+1})\psi(q_{i+\frac{3}{2}}) \quad (107)$$

Mit  $\psi(q)$  wird der van Leer Limiter bezeichnet:

$$\psi(q) = \frac{|q| + q}{1 + q} \quad (108)$$

$$q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{(V_i - V_{i-1})}{(V_{i+1} - V_i)} \quad , \quad q_{i+\frac{3}{2}} = \frac{(V_{i+1} - V_i)}{(V_{i+2} - V_{i+1})} \quad (109)$$

**Bemerkung 6.1** *Ein Schema besitzt die TVD Eigenschaft, wenn gilt*

$$TV(V^{n+1}) \leq TV(V^n) \quad (110)$$

wobei die Totalvariation der Lösung folgendermaßen definiert ist

$$TV(V^n) = \sum_i |V_{i+1}^n - V_i^n| \quad (111)$$

Durch den Limiter wird die Diskretisierung dem Verhalten der Lösung angepasst und in Bereichen, in denen die Lösung steile Gradienten besitzt, numerische Diffusion hinzugefügt. Treten zum Beispiel Oszillationen auf, wodurch die Differenzen benachbarter Punkte unterschiedliche Vorzeichen erhalten, dann nimmt der Limiter den Wert Null an und reduziert das Schema zum Ersten-Ordnung-Upwindschema. Außerhalb der lokalen Extremstellen besitzt das Schema Zweite-Ordnung Genauigkeit.

Die Zweite-Ordnung-Upwind-Diskretisierung mit dem van Leer Limiter liefert zufriedenstellende Ergebnisse. Die Abbildung 36 zeigt, dass keine Oszillationen auftreten und auch die Werte der ersten und zweiten Ableitung sehr gute Approximationen für die analytischen Werte liefern. Der Einsatz des van Leer Limiters hat jedoch einen Nachteil. Da er nicht linear ist, wird auch die Diskretisierung des linearen Problems nicht linear.

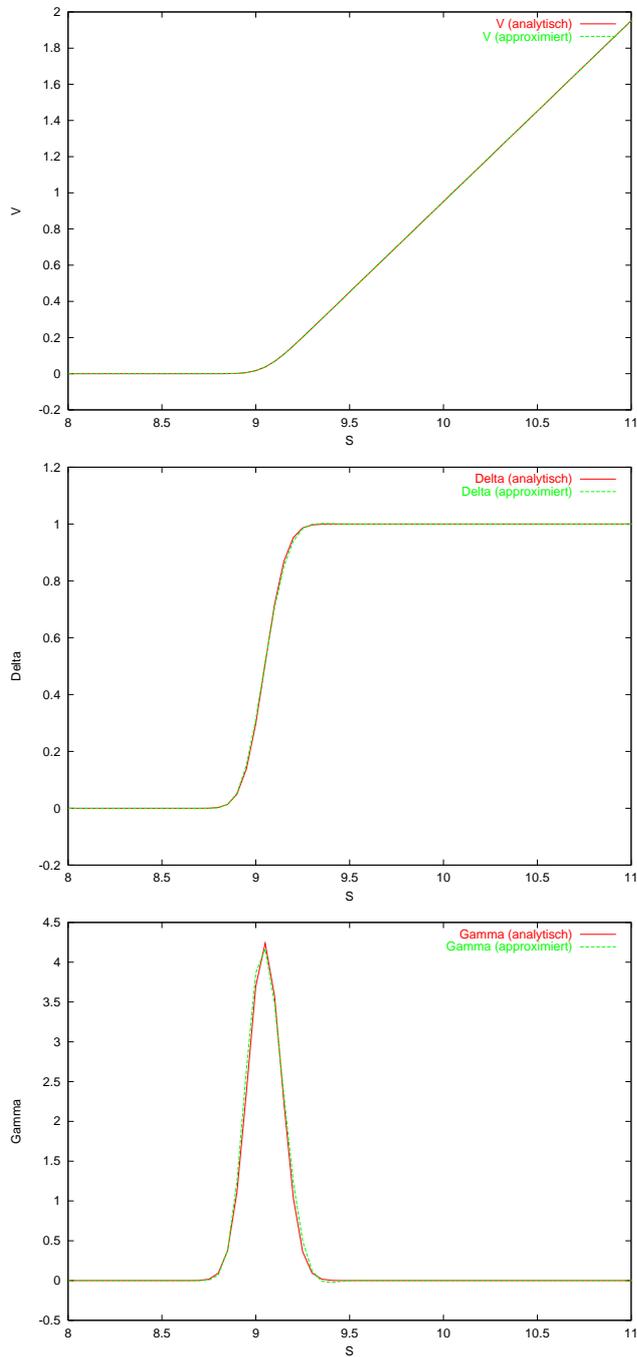


Abbildung 36: Der Wert  $V$ , die Deltafunktion und die Gammafunktion für einen europäischen Call mit der Laufzeit  $T=1$  Jahr, dem Ausübungspreis  $K = 10$  €, der Volatilität  $\sigma = 0.01$  und dem risikolose Zinssatz  $r = 0.1$ . Für die Bewertung wurde die Zweite-Ordnung-Upwind-Diskretisierung mit dem van Leer Limiter und  $\delta S = 0.05$  und  $\delta t = 0.005$  verwendet.

**Höhere-Ordnung-Defektkorrektur** Mit dem Schema der Höheren-Ordnung-Defektkorrektur kann man aus dem oben angesprochenen nicht linearen Problem ein lineares gestalten. Die Idee lässt sich an einer Gleichung mit einem Konvektionsterm ( $K(V)$ ) demonstrieren:

$$K(V) = f \quad (112)$$

Zwei Diskretisierungen unterschiedlicher Ordnung werden für die Behandlung dieser Differentialgleichung betrachtet, wobei der Operator mit der niedrigeren Ordnung linear ist.

$\tilde{K}_h$  Operator höherer Ordnung (z.B. 2 - Ordnung - upwind mit Limiter)  
 $K_h$  Operator niedriger Ordnung (z.B. 1-Ordnung-upwind)

Verwendet man den Operator niedriger Ordnung, dann gilt in dem  $m$ -ten Iterationsschritt:

$$K_h(V_h^m - V_h^{m-1}) = f_h - K_h V_h^{m-1} \quad (113)$$

Die beiden Diskretisierungsoperatoren können in der Gleichung miteinander kombiniert werden, indem der Operator mit der niedrigeren Ordnung in der rechten Seite durch den Operator höherer Ordnung ersetzt wird,

$$\begin{aligned} K_h(V_h^m - V_h^{m-1}) &= f_h - \tilde{K}_h V_h^{m-1} \\ \Leftrightarrow K_h V_h^m &= f_h - \tilde{K}_h V_h^{m-1} + K_h V_h^{m-1}. \end{aligned} \quad (114)$$

Die Lösung der Iteration (114) konvergiert gegen die Lösung, die man mit dem Operator höherer Ordnung erhalten würde, falls sie konvergiert ( $\rho(I - (K_h)^{-1}\tilde{K}_h) < 1$ ) (vergleiche [33]).

Da der nichtlineare Operator höherer Ordnung mit dem alten Iterationswert ( $V_h^{m-1}$ ) in die rechte Seite eingeht erhält man in jedem Iterationsschritt ein lineares Problem, löst aber mit der gesamten Iteration ein nicht lineares Problem.

Aus den beiden Operatoren

$$\begin{aligned} K_h V_h^{m-1} &= \frac{a}{h} [0 \quad \underline{-1} \quad 1]_h V_h^{m-1} \\ \tilde{K}_h V_h^{m-1} &= \frac{a}{h} [0 \quad \underline{-1} \quad 1]_h V_h^{m-1} \\ &\quad + \frac{a}{2h} [0 \quad \underline{-1} \quad 1]_h V_h^{m-1} \psi(q_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{a}{2h} [0 \quad \underline{0} \quad -1 \quad 1]_h V_h^{m-1} \psi(q_{i+\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

erhält man für die diskretisierte Gleichung (112) in Stencil-Schreibweise:

$$\frac{a}{h}[0 \ \underline{-1} \ 1]_h V_h^m = f_h - \underbrace{\frac{a}{2h}[0 \ \underline{-1} \ 1]_h V_h^{m-1} \psi(q_{i+\frac{1}{2}}) + \frac{a}{2h}[0 \ \underline{0} \ -1 \ 1]_h V_h^{m-1} \psi(q_{i+\frac{3}{2}})}_{N_{\tilde{K}}(V^{m-1})} \quad (115)$$

beziehungsweise:

$$K_h V_h^m = f_h - N_{\tilde{K}}(V^{m-1}) \quad (116)$$

### 6.1.3 Die Matrixgleichung

Die oben beschriebenen Diskretisierungen werden nun verwendet, um die Black-Scholes-Gleichung als Matrixgleichung darzustellen. Für den Zeitterm (T) wird das  $\theta$ -BDF2-Verfahren (siehe Abschnitt 6.1.1), für den Konvektionsterm (K) das Zweite-Ordnung-Upwind-Schema mit dem van Leer Limiter (siehe Abschnitt 6.1.2) und für den Diffusionsterm (D) die Diskretisierung (101) verwendet. Der Reaktionsterm wird mit "T" bezeichnet. Durch die Diskretisierung erhält man die Iterationsvorschrift:

$$T_h^k V_h^{k,m} - \theta K_h V_h^{k,m} - D_h V_h^{k,m} + R_h V_h^{k,m} = T_h^{k-1} V_h^{k-1} - T_h^{k-2} V_h^{k-2} + (1 - \theta) K_h \bar{V}_h^{k,m} - N_{\tilde{K}} \tilde{V}_h^{k,m-1} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \tilde{V}_h^{k,m-1} &= \theta V_h^{k,m-1} + (1 - \theta)(2V_h^{k-1} - V_h^{k-2}) \\ \bar{V}_h^{k,m} &= 2V_h^{k-1} - V_h^{k-2} \\ &\text{Zeitindex } k, \text{ Iterationsindex } m \end{aligned}$$

In Stencil Schreibweise lautet diese Vorschrift:

$$\begin{aligned} &\frac{3}{2\tau}[0 \ \underline{1} \ 0]_h V_h^{k,m} - \theta \frac{rS}{h}[0 \ \underline{-1} \ 1]_h V_h^{k,m} \\ &- \frac{\sigma^2 S^2}{2h^2}[1 \ \underline{-2} \ 1]_h V_h^{k,m} + r[0 \ \underline{1} \ 0]_h V_h^{k,m} \\ = &\frac{2}{\tau}[0 \ \underline{1} \ 0]_h V_h^{k-1} - \frac{1}{2\tau}[0 \ \underline{1} \ 0]_h V_h^{k-2} + (1 - \theta) \frac{rS}{h}[0 \ \underline{-1} \ 1]_h \bar{V}_h^{k,m} \\ &- \frac{(-rS)}{2h}[0 \ \underline{-1} \ 1]_h V_h^{k,m-1} \psi(q_{i+\frac{1}{2}}^{m-1}) \\ &+ \frac{(-rS)}{2h}[0 \ \underline{0} \ -1 \ 1]_h V_h^{k,m-1} \psi(q_{i+\frac{3}{2}}^{m-1}) \end{aligned} \quad (118)$$

Aus (118) läßt sich ein lineares Gleichungssystem herleiten, mit dem die Werte für die Option im  $k$ -ten Zeitschritt iterativ bestimmt werden können. Nach der Elimination der Randbedingungen erhält man die Matrixgleichung

$$AV_h^{k,m} = B_h^{k,m-1} . \quad (119)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{N-2,N-3} & a_{N-2,N-2} & a_{N-2,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1,N-2} & a_{N-1,N-1} \end{pmatrix}$$

$$a_{ii} = \frac{3}{2\tau} + \theta \frac{rS}{h} + \frac{2\sigma^2 S_i^2}{2h^2} + r \quad (120)$$

$$a_{i,i-1} = -\frac{2\sigma^2 S_i^2}{2h^2} \quad (121)$$

$$a_{i,i+1} = -\theta \frac{rS}{h} - \frac{\sigma^2 S_i^2}{2h^2} \quad (122)$$

und

$$B_h^{k,m-1} = \begin{pmatrix} b_1^{k,m-1, \text{el. Rand}} \\ \vdots \\ b_{i-1}^{k,m-1} \\ b_i^{k,m-1} \\ b_{i+1}^{k,m-1} \\ \vdots \\ b_{N-1}^{k,m-1, \text{el. Rand}} \end{pmatrix} \quad (123)$$

$$\begin{aligned} b_i^{k,m-1} &= V_i^{k,m-1} \left( -\frac{rS_i}{2h} \psi(q_{i+\frac{1}{2}}^{m-1}) \right) + V_{i+1}^{k,m-1} \left( \frac{rS_i}{2h} \psi(q_{i+\frac{1}{2}}^{m-1}) \right) \\ &+ \frac{rS_i}{2h} \psi(q_{i+\frac{3}{2}}^{m-1}) + V_{i+2}^{k,m-1} \left( -\frac{rS_i}{2h} \psi(q_{i+\frac{3}{2}}^{m-1}) \right) \\ &+ V_i^{k-1} \left( \frac{2}{\tau} - (1-\theta) 2 \frac{rS_i}{h} \right) - V_i^{k-2} \left( \frac{1}{2\tau} - (1-\theta) \frac{rS_i}{h} \right) \\ &+ V_{i+1}^{k-1} \left( (1-\theta) 2 \frac{rS_i}{h} \right) - V_{i+1}^{k-2} \left( (1-\theta) \frac{rS_i}{h} \right) \end{aligned} \quad (124)$$

$$i = 1, \dots, N-1$$

Durch die Elimination der Randbedingungen gilt zusätzlich

$$b_1^{k,m-1,\text{el. Rand}} = b_1^{k,m-1} + \frac{\sigma^2 S_1^2}{2h^2} V_0^k \quad (125)$$

$$b_{N-1}^{k,m-1,\text{el. Rand}} = b_{N-1}^{k,m-1} + \left( \theta \frac{r S_{N-1}}{h} + \frac{\sigma^2 S_{N-1}^2}{2h^2} \right) V_N^k \quad (126)$$

Durch das Defektkorrekturschema erhält man für die diskretisierte Black-Scholes-Gleichung in jedem Zeitschritt  $k$  die Iterationsvorschrift

$$A_h V_h^{k,m} = B_h^{k,m-1}, \quad (127)$$

wobei mit  $k$  der Zeitindex und mit  $m$  der Iterationsindex im  $k$ -ten Zeitschritt bezeichnet wird. Nach jedem Iterationsschritt muss die rechte Seite neu bestimmt werden.

Das Gleichungssystem (127) könnte auf Grund seiner Form, die Matrix  $A_h$  ist eine Tridiagonalmatrix, am besten direkt gelöst werden. Die Betrachtung der europäischen Optionen dient aber nur zur Vorbereitung auf die Bewertung der asiatischen Optionen. Da die partielle Differentialgleichung für die asiatischen Optionen ein höher dimensionales Problem darstellt, erhält man weiter Nebendiagonalen in der Matrix  $A_h$ . Dadurch kann das Gleichungssystem, das bei diesen Optionstypen entsteht, nur mit sehr viel Rechenaufwand direkt gelöst werden. Es ist daher sinnvoll schon jetzt ein iteratives Lösungsverfahren zu verwenden. Jeder Zeitschritt besteht dadurch aus einer "äußeren" und einer "inneren" Iteration. Die "äußere" Iteration entsteht durch die Defektkorrektur und ergibt die Gleichung (127). Mit der "inneren" Iteration wird die Approximation  $V^{k,m}$  für die Gleichung (127) bestimmt.

Der größte Anteil bei der Bewertung der Optionen liegt daher in der Lösung von Matrixgleichungen. Da im Folgenden die iterative Lösung der Matrixgleichung (127) betrachtet wird, werden zur Vereinfachung der Schreibweise die Bezeichnungen  $\tilde{V}_h = V_h^{k,m}$  und  $\tilde{B}_h = B_h^{k,m-1}$  eingeführt, so dass die Matrixgleichung (127) in der Form

$$A_h \tilde{V}_h = \tilde{B}_h \quad (128)$$

geschrieben wird. Die Approximation der Lösung  $\tilde{V}_h$  im  $m$ -ten Iterationsschritt wird mit  $\tilde{V}_h^m$  bezeichnet.

## 6.2 Numerische Lösung der Black-Scholes-Gleichung

Im Folgenden werden europäische Standardoptionen mit der Anfangs-Randwertaufgabe (82) bis (88) bewerten. Dabei wird die Black-

Scholes-Gleichung mit den oben beschriebenen Diskretisierungen diskretisiert. Für den Zeitterm wird das  $\theta$ -BDF2-Verfahren mit  $\theta = 0.75$  und für den Konvektionsterm das Zweite-Ordnung-Upwind-Schema mit dem van Leer Limiter gewählt. Die Matrixgleichung (128), die dabei entsteht, wird mit dem Gauß-Seidel-Verfahren

$$\tilde{V}_j^m = \frac{\tilde{b}_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i} \tilde{V}_i^m - \sum_{i=j+1}^{N-1} a_{j,i} \tilde{V}_i^{m-1}}{a_{j,j}} \quad (129)$$

$$j = 1, \dots, N - 1$$

iterativ gelöst. Die Ergebnisse in Beispiel 6.1 zeigen, dass bei der iterativen Lösung mit dem Gauß-Seidel-Verfahren sehr viele Iterationen benötigt werden, wenn die Volatilität  $\sigma$  der Aktie große Werte annimmt.

**Beispiel 6.1** *Es werden die Werte für europäische Call- und Putoptionen bestimmt. Die Optionen haben die Laufzeit  $T = 1$  Jahr und den Ausübungspreis  $K = 10$  €. Die Kurse der Aktien, auf die sich die Derivate beziehen, stehen zum Zeitpunkt  $t = 0$  bei  $S_0 = 10$  € und der risikolose Zinssatz beträgt  $r = 0.1$ . In Tabelle 23 beziehungsweise in Tabelle 24 sind die Werte für die Calloptionen beziehungsweise die Putoptionen auf diese Aktien mit verschiedenen Volatilitäten angegeben.*

*Der Lösungsbereich ist mit  $S^{\max} = 25$  € begrenzt und für die Raumschrittweite wird  $\delta S = 0.1$  und für die Zeitschrittweite  $\delta t = 0.01$  gewählt.*

*Neben den Optionswerten  $V^{GS}$ , die man mit dem Gauß-Seidel-Verfahren als Lösungsverfahren erhält, wird die durchschnittliche Anzahl der inneren Iterationen (siehe Abschnitt 6.1.3), die das Verfahren benötigt, angegeben. Die inneren Iterationen werden so lange durchgeführt, bis das Residuum der entsprechenden Startlösung um den Faktor  $10^{-4}$  zu reduzieren wurde. Als Vergleichswerte dienen die Ergebnisse der analytischen Lösung  $V^{an}$ .*

*Die Bewertungen werden auf einem PC mit einem Pentium 3 Prozessor mit 700 Mhz durchgeführt. Der Code des C-Programmes, der dafür verwendet wurde, ist in Anhang A dargestellt.*

$\sigma$	$V^{an}$	$V^{GS}$	innere Iterationen
0.01	0.95	0.95	3
0.1	1.03	1.03	21
0.2	1.32	1.32	57
0.3	1.67	1.67	105
0.4	2.03	2.03	162

Tabelle 23: Die Werte für einen europäischen Call auf Aktien mit verschiedenen Volatilitäten

$\sigma$	$V^{analytisch}$	$V^{GS}$	innere Iterationen
0.1	0.07	0.07	6
0.2	0.37	0.37	18
0.3	0.72	0.72	53
0.4	1.08	1.08	132

Tabelle 24: Die Werte für einen europäischen Put auf Aktien mit verschiedenen Volatilitäten

*Die Ergebnisse zeigen, dass die numerisch bestimmten Werte mit den analytischen Werten übereinstimmen. Die Anzahl der Iterationen und damit die benötigte Rechenzeit des oben beschriebenen Verfahrens nimmt mit der Volatilität der Aktien überproportional zu.*

### 6.3 Numerische Lösung der Black-Scholes-Ungleichung

Im Fall der amerikanischen Standardoptionen ergibt sich aus der Black-Scholes-Gleichung eine Ungleichung (130), mit der die Optionswerte bestimmt werden können. Durch die Einführung des neuen Zeitparameters erhält man die Ungleichung:

$$\mathcal{L}_{BS}V = V_t - \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS} - rSV_S + rV \geq 0 \quad (130)$$

Das resultierende freie Randwertproblem kann durch folgendes lineare Komplementaritätsproblem gelöst werden,

$$\begin{aligned} V(P) - G(P) &\geq 0 \\ \mathcal{L}_{BS}V(P) &\geq 0 \\ (V(P) - G(P))(\mathcal{L}_{BS}V(P)) &= 0 \\ P &\in \Omega \end{aligned} \quad (131)$$

Die End- und Randbedingungen sind durch den betrachteten Optionstyp bestimmt (siehe Abschnitt 3.4).

Da die einzelnen Terme der partiellen Differentialgleichung (130) denen der Black-Scholes-Gleichung entsprechen werden die gleichen Diskretisierungen verwendet. Auf Grund der Wahl der Diskretisierung für den Konvektionsterm<sup>5</sup> wird, wie bei den europäischen Optionen, in jedem Zeitschritt  $k$  die Lösung für den Optionswert  $V^k$  iterativ bestimmt. In jedem Iterationsschritt muss das lineare Komplementaritätsproblem

$$\begin{aligned} V_h^{k,m} - G_h &\geq 0 \\ A_h V_h^{k,m} - B_h^{k,m-1} &\geq 0 \\ (V_h^{k,m} - G_h)(A_h V_h^{k,m} - B_h^{k,m-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (132)$$

gelöst werden. Die Matrix  $A_h$  und der Vektor  $B_h^{k,m-1}$  wurden bei der Behandlung der europäischen Optionen in Abschnitt 6.1.3 hergeleitet.

Da im Folgenden die iterative Lösung des linearen Komplementaritätsproblems (132) gezeigt wird, werden zur Vereinfachung der Schreibweise wieder die Bezeichnungen  $\tilde{V}_h = V_h^{k,m}$  und  $\tilde{B}_h = B_h^{k,m-1}$  eingeführt. In jedem Zeitschritt ergibt sich demnach für jeden Iterationsschritt ein lineares Komplementaritätsproblem der Form

$$\begin{aligned} \tilde{V}_h - G_h &\geq 0 \\ A_h \tilde{V}_h - \tilde{B}_h &\geq 0 \\ (\tilde{V}_h - G_h)(A_h \tilde{V}_h - \tilde{B}_h) &= 0. \end{aligned} \quad (133)$$

Um dieses lineare Komplementaritätsproblem zu lösen kann man nach dem Projektions-Gauß-Seidel-Algorithmus von Cryer verfahren.

### 6.3.1 Der Projektions-Gauß-Seidel-Algorithmus

Die Idee des Projektions-Gauß-Seidel-Verfahrens liegt darin, während der punktweisen, iterativen Lösung des Gleichungssystem  $A_h \tilde{V}_h = \tilde{B}_h$  dafür zu sorgen, dass die Nebenbedingung  $\tilde{V}_h - G_h \geq 0$  erfüllt wird (siehe [6] und [30]). Die Approximation im  $m$ -ten Iterationsschritt wird mit  $V^m$  bezeichnet.

Das Prinzip des Projektions-Gauß-Seidel-Verfahrens:

- Bestimmen der einzelnen Komponenten des Lösungsvektors mit

---

<sup>5</sup>Zweite-Ordnung-Upwinddiskretisierung mit dem van Leer Limiter

dem Gauß-Seidel-Verfahren

$$\tilde{V}_j^{m-\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{b}_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i} \tilde{V}_i^{m-\frac{1}{2}} - \sum_{i=j+1}^{N-1} a_{j,i} \tilde{V}_i^{m-1}}{a_{j,j}}$$

$$j = 1, \dots, N - 1 \quad (134)$$

- unter komponentenweiser Berücksichtigung der Nebenbedingung  $\tilde{V}_h^m \geq G_h$

$$\tilde{V}_j^m = \max(\tilde{V}_j^{m-\frac{1}{2}}, G_j)$$

$$j = 1, \dots, N - 1 \quad (135)$$

(Projektion der Lösung)

In Beispiel 6.2 wird gezeigt, dass auch bei dem iterativen Lösen mit dem Projektions-Gauß-Seidel-Verfahren sehr viele Iterationen benötigt werden, um eine Approximation mit geeigneter Genauigkeit bestimmen zu können, falls die betrachtete Aktie eine hohe Volatilität  $\sigma$  besitzt.

**Beispiel 6.2** *Es werden nur amerikanische Putoptionen bewertet, da Aktien ohne Dividendenzahlung betrachtet werden. Die Optionen haben die Laufzeit  $T = 1$  Jahr und den Ausübungspreis  $K = 10$  €. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  steht der Kurs der Aktien bei  $S_0 = 10$  € und der risikolose Zinssatz beträgt  $r = 0.1$ . In Tabelle 25 sind die Werte für die Putoptionen auf die Aktien mit verschiedenen Volatilitäten angegeben.*

*Der Lösungsbereich ist mit  $S^{max} = 25$  € begrenzt und für die Raumschrittweite wird  $\delta S = 0.1$  und für die Zeitschrittweite  $\delta t = 0.01$  gewählt.*

*Neben den Optionswerten  $V^{PGS}$ , die man mit dem Projektions-Gauß-Seidel-Verfahren als Lösungsverfahren erhält, wird die durchschnittliche Anzahl der inneren Iterationen (siehe Abschnitt 6.1.3), die das Verfahren benötigt, angegeben. Die inneren Iterationen werden so lange durchgeführt, bis das Residuum der entsprechenden Startlösung um den Faktor  $10^{-4}$  zu reduzieren wurde. Als Vergleichswerte dienen die Ergebnisse  $V^{trans}$ , die die transformierte Black-Scholes-Gleichung (siehe Bemerkung 6.2) liefert.*

*Die Bewertungen werden auf einem PC mit einem Pentium 3 Prozessor mit 700 Mhz durchgeführt. Der Code des C-Programmes, der*

dafür verwendet wurde, ist in Anhang A dargestellt.

$\sigma$	$V^{trans}$	$V^{GS}$	innere Iterationen
0.1	0.16	0.16	7
0.2	0.48	0.48	18
0.3	0.83	0.83	40
0.4	1.19	1.19	84

Tabelle 25: Die Werte für einen amerikanischen Put auf Aktien mit verschiedenen Volatilitäten

*Die Ergebnisse, die man durch die Lösung des linearen Komplementaritätsproblems (131) erhält, stimmen mit denen, die die transformierte Black-Scholes-Gleichung liefert überein. Ausserden zeigt sich, dass die Anzahl der Iterationen und damit die benötigte Rechenzeit mit der Volatilität der Aktie überproportional zunimmt.*

**Bemerkung 6.2** *Die Black-Scholes-Gleichung ist äquivalent zu der partielle Differentialgleichung*

$$y_t = y_{xx} . \tag{136}$$

*Die Transformation und das Verhalten der Anfangs- und Randbedingungen können zum Beispiel in [30] nachgelesen werden.*

## 7 Anwendung eines Mehrgitterverfahrens

Die Bewertung der europäischen und amerikanischen Optionen erfolgt über die Lösung von Gleichungssystemen der Form  $A_h \tilde{V}_h = \tilde{B}_h$ , wobei in dem Fall der amerikanischen Optionen zusätzlich die Projektion der Lösung berücksichtigt werden muss. Um solche Gleichungssysteme schnell lösen zu können, sind Mehrgitteralgorithmen effiziente Verfahren.

Zuerst werden die Grundlagen von Mehrgitteralgorithmen für eine lineare partielle Differentialgleichung beschrieben und auf den Fall der europäischen Optionen angewendet. Danach wird der nicht lineare Fall betrachtet, um die amerikanischen Optionen zu behandeln.

### 7.1 Mehrgitter für lineare partielle Differentialgleichungen

Das Gauß-Seidel-Verfahren besitzt einen Konvergenzfaktor von  $\rho(GS) = 1 - O(h^2)$  und ist damit kein besonders schnelles iteratives Lösungsverfahren. Statt dessen besitzt dieses Verfahren gute Glättungseigenschaften, die bei der Anwendung von Mehrgitteralgorithmen von großer Bedeutung sind. Durch das mehrmalige Anwenden des Gauß-Seidel-Verfahrens wird der Fehler der Startlösung geglättet und kann dadurch auf einem gröberen Gitter dargestellt und mit weniger Rechenaufwand bestimmt werden.

Die Glättungseigenschaft des Gauß-Seidel-Verfahrens kann man sich bei seiner Anwendung auf die zweidimensionale Poissongleichung für eine beliebige Funktion  $u$ ,

$$\mathcal{L}u = -u_{xx} - u_{yy} = f \quad (\Omega) \quad (137)$$

$$u = f \quad (\partial\Omega) \quad (138)$$

verdeutlichen. In der diskreten Darstellung der Poissongleichung erhält man für Gitterpunkte  $(x, y) \in \Omega_h$ , die keine Randpunkt von  $\Omega_h$  sind, in Stencilschreibweise die Gleichung

$$\mathcal{L}_h u_h(x, y) = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}_h u_h(x, y) = f_h(x, y). \quad (139)$$

Durch die Anwendung des klassischen Gauß-Seidel-Verfahrens werden die inneren Punkte  $(x_i, y_j)$  von  $\Omega_h$  mit der Gleichung

$$u_h^{m+1}(x_i, y_j) = \frac{1}{4}[h^2 f_h(x_i, y_j) + u_h^{m+1}(x_{i-1}, y_j) + u_h^m(x_{i+1}, y_j) + u_h^{m+1}(x_i, y_{j-1}) + u_h^m(x_i, y_{j+1})] \quad (140)$$

bestimmt, wobei mit  $m$  der Iterationsindex bezeichnet wird. Um den Einfluss des Gauß-Seidel-Verfahrens auf den Fehler betrachten zu können, muss man die Approximation  $u_h^m$  durch die Lösung  $u_h$  selbst und den Fehler  $e_h^m$  ersetzen,

$$u_h^m(x_i, y_j) = u_h(x_i, y_j) - e_h^m(x_i, y_j) . \quad (141)$$

Dadurch erhält man für den Fehler die Gleichung

$$e_h^{m+1}(x_i, y_j) = \frac{1}{4}[e_h^{m+1}(x_{i-1}, y_j) + e_h^m(x_{i+1}, y_j) + e_h^{m+1}(x_i, y_{j-1}) + e_h^m(x_i, y_{j+1})] . \quad (142)$$

Mit einer Gauß-Seidel-Iteration wird für jeden Gitterpunkt ein Wert bestimmt, dessen Fehler dem gemittelten Wert aus den Fehlern der Nachbarpunkte entspricht. Durch die mehrmalige Anwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens erhält man eine Approximation  $\bar{u}_h^m$  der Lösung  $u_h$ , deren Fehler  $\bar{e}_h^m = u_h - \bar{u}_h^m$  glatt ist (siehe Abb. 37). Da das Gauß-Seidel-Verfahren in erster Linie als Glättungsverfahren und nicht als Lösungsverfahren eingesetzt wird, wird der Iterationsindex beibehalten und die geglättete Approximation im  $m$ -ten Iterationsschritt durch einen Balken mit  $\bar{u}_h^m$  gekennzeichnet.

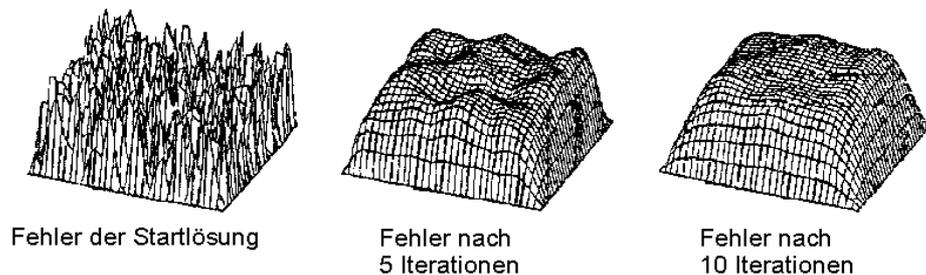


Abbildung 37: Der Einfluss der Gauß-Seidel-Iterationen auf den Fehler im Fall der Poissongleichung (aus [33])

Der Fehler  $\bar{e}_h^m$  dieser Approximation erfüllt die Gleichung

$$A_h \bar{e}_h^m = f_h - A_h \bar{u}_h^m = \bar{d}_h^m . \quad (143)$$

Auf Grund des glatten Verlaufes des Fehlers  $\bar{e}_h^m$  kann dieser auf einem gröberen Gitter mit weniger Gitterpunkten ohne einen bedeutenden Informationsverlust dargestellt werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten dieses gröbere Gitter zu konstruieren. Häufig wird die *Standardvergrößerung* verwendet (siehe Abb. 38), bei der die Intervalllängen verdoppelt werden ( $H = 2h$ ).

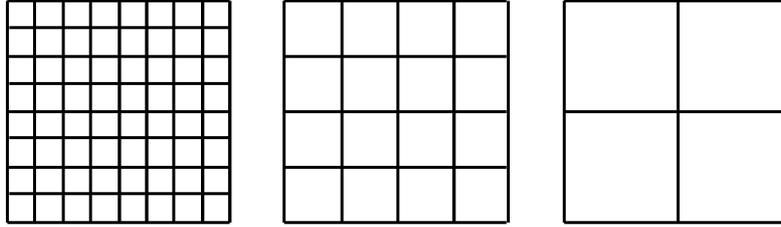


Abbildung 38: Zwei Standardvergrößerungen von  $h = \frac{1}{8}$  ausgehend

Auf dem gröberen Gitter  $\Omega_H$  wird der Fehler durch die Matrixgleichung

$$A_H \bar{e}_H^m = \bar{d}_H^m . \quad (144)$$

approximiert. Die Gleichung (144) kann mit weniger Rechenaufwand als die Gleichung (143) entweder direkt oder iterativ gelöst werden, man erhält den Fehler  $\hat{e}_H^m$ . Dieser Fehler  $\hat{e}_H^m$  muss auf das feinere Gitter interpoliert ( $\hat{e}_h^m$ ) und zu der dortigen Approximation  $\bar{u}_h^m$  addiert werden, um diese zu verbessern.

$$\bar{u}_h^{m+1} = \bar{u}_h^m + \hat{e}_h^m \quad (145)$$

Die Übertragung der Gitterfunktion von dem feinen Gitter, mit der Schrittweite  $h$ , auf das gröbere Gitter, mit der Schrittweite  $H$ , bezeichnet man mit *Restriktion* und wird mit dem *Restriktionsoperator*  $I_h^H$  durchgeführt. Den umgekehrten Vorgang nennt man *Interpolation* und verwendet dafür den *Interpolationoperator*  $I_H^h$ .

$$\bar{d}_H^m = I_h^H \bar{d}_h^m \quad (146)$$

$$\hat{e}_h^m = I_H^h \hat{e}_H^m \quad (147)$$

Im weiteren Verlauf wird als Restriktionsoperator der *Injektionsoperator* (siehe Abb. 39) verwendet, bei dem die Grobgitterwerte und Feingitterwerte eines Gitterpunktes einander entsprechen:

$$\bar{d}_H^m(P) = I_h^H \bar{d}_h^m(P) = \bar{d}_h^m(P) \quad P \in \Omega_H \subset \Omega_h \quad (148)$$

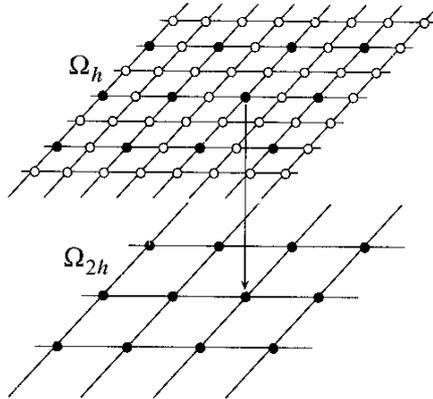


Abbildung 39: Übertragung der Gitterfunktion mit dem Injektionsoperator bei der Standardvergrößerung (aus [33])

Die Interpolation wird mit der *bilinearen Interpolation*

$$I_H^h \hat{e}_H^m(P_i) = \begin{cases} \hat{e}_H^m(P_i) & 1 \leq i \leq 4, \\ \frac{1}{2}(\hat{e}_H^m(P_1) + \hat{e}_H^m(P_2)) & i = 5, \\ \frac{1}{2}(\hat{e}_H^m(P_1) + \hat{e}_H^m(P_4)) & i = 6, \\ \frac{1}{4}(\sum_{j=1}^4 \hat{e}_H^m(P_j)) & i = 7 \end{cases} \quad (149)$$

durchgeführt. Mit  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  werden die Eckpunkte eines quadratischen Intervalls des größeren Gitters bezeichnet, wie in Abbildung 40 dargestellt ist. Die Punkte  $P_5, P_6$  und  $P_7$  stehen stellvertretend für die Gitterpunkte, die sich zusätzlich auf dem feineren Gitter befinden (siehe Abb. 40).

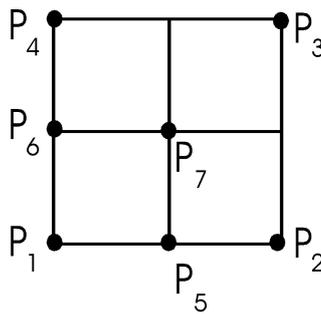


Abbildung 40: Die Grobgitterpunkte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  mit den Feingitterpunkten  $P_5, P_6$  und  $P_7$  in einem quadratischen Intervall (aus [6])

Das bisher beschriebene Verfahren arbeitet mit zwei verschiedenen Gittern, einem feinen und einem groben, und wird daher *Zweigitterverfahren* (41) genannt.

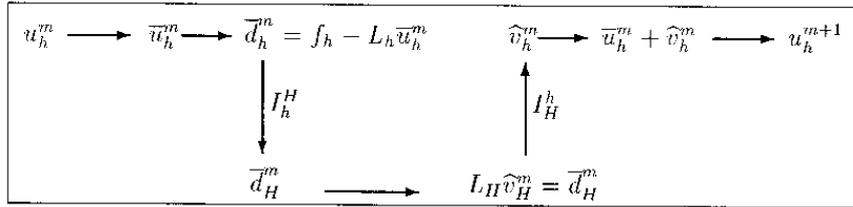


Abbildung 41: Das Zweigitterverfahren (aus [33]). In dieser Darstellung wird der Fehler mit  $v$  und nicht mit  $e$  bezeichnet.

Es basiert auf den folgenden beiden Grundprinzipien (vergleiche [33]):

*Glättungsprinzip:* Durch iterative Lösungsverfahren, wie das Gauß-Seidel-Verfahren, kann der Fehler einer Approximation geglättet werden.

*Grobgitterkorrektur:* Ein glatter Fehler kann auf einem größeren Gitter angenähert werden, wobei der Rechenaufwand wesentlich geringer ist als auf dem feinen Gitter.

**Bemerkung 7.1** *Durch die Einführung eines zusätzlichen Relaxationsparameters  $\omega$ , kann das Konvergenzverhalten des Gauß-Seidel-Verfahrens verbessert werden.*

$$z_h^{m+1}(x_i, y_j) = \frac{1}{4}(h^2 f_h(x_i, y_j) + u_h^{m+1}(x_i - h, y_j) + u_h^m(x_i + h, y_j) + u_h^{m+1}(x_i, y_j - h) + u_h^m(x_i, y_j + h)) \quad (150)$$

$$u_h^{m+1} = u_h^m + \omega(z_h^{m+1} - u_h^m) \quad (151)$$

Mit der geeigneten Wahl von  $\omega^*$  erhält man den Konvergenzfaktor  $\rho(\omega^* - GS) = 1 - O(h)$ . Bei der Anwendung von Mehrgitterverfahren ist jedoch nicht der Konvergenzfaktor des Gauß-Seidel-Verfahrens entscheidend, sondern seine Glättungseigenschaften. Diese sind am besten für einen Relaxationsparameter, der sehr nahe an  $\omega = 1$  liegt (vergleiche [33]). Durch die Einführung des Relaxationsparameters kann man nur eine geringfügige Verbesserung der Glättungseigenschaften des Verfahrens erzielen. Dieser Gewinn lohnt sich aber nicht, wenn man den zusätzlichen Rechenaufwand betrachtet. In jedem Glättungsschritt kommen für jeden Punkt zwei Operationen hinzu. Deswegen wird im Folgenden mit dem klassischen Gauß-Seidel Verfahren (129) gearbeitet.

Die Grobgittergleichung (144) muss nicht unbedingt exakt gelöst werden, wenn man über ein gut konvergierendes Zweigitterverfahren

verfügt. Man kann ohne grossen Verlust der Konvergenzgeschwindigkeit die exakte Lösung durch eine geeignete Approximation ersetzen. Diese Approximation kann man wiederum mit der Zweigittermethode bestimmen, wodurch man schliesslich auf einem dritten, noch gröberen Gitter arbeitet. Man kann dieses Vorgehen so lange weiterführen bis man auf einem Gitter angelangt ist, auf dem die Residuumsgleichung ohne grossen Rechenaufwand entweder direkt oder iterativ gelöst werden kann. Nachdem die Lösung auf dem grössten Gitter bestimmt wurde, werden alle angefangenen Zweigitterzyklen nacheinander beendet. Vor jeder Interpolation muss die Lösung nocheinmal geglättet werden.

Durch die Verschachtelung mehrerer Zweigitterzyklen nach der oben beschriebenen Methode erhält man einen speziellen Mehrgitterzyklus, den sogenannten *V-Zyklus*.

Da in dieser Mehrgittervariante auf den groben Gittern mit Korrekturen für die Feingitterapproximation gearbeitet wird, nennt man das lineare Mehrgitterverfahren auch *Korrekturschema*.

### 7.1.1 Anisotrope Probleme

Das Gauß-Seidel-Verfahren, mit dem die Fehler punktweise geglättet werden, und die Standardvergrößerung können nicht immer in einem Mehrgitteralgorithmus erfolgreich miteinander kombiniert werden, wie an dem Beispiel des anisotropen Problems

$$Lu = -\epsilon u_{xx} - u_{yy} = f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (152)$$

mit  $0 < \epsilon \ll 1$

gezeigt wird. Für die diskrete Darstellung des anisotropen Problems erhält man für Gitterpunkte  $(x, y) \in \Omega_h$ , die keine Randpunkte von  $\Omega_h$  sind, in Stencilschreibweise die Gleichung

$$L_h u_h(x, y) = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -\epsilon & 2(1 + \epsilon) & -\epsilon \\ & -1 & \end{bmatrix}_h u_h(x, y) = f_h. \quad (153)$$

Bei der Anwendung des Gauß-Seidel-Verfahrens ergibt sich für den Fehler in dem Gitterpunkt  $(x_i, y_j)$ :

$$e_h^{m+1}(x_i, y_j) = \frac{1}{2(\epsilon + 1)} [\epsilon e_h^{m+1}(x_{i-1}, y_j) + e_h^{m+1}(x_i, y_{j-1}) + \epsilon e_h^m(x_{i+1}, y_j) + e_h^m(x_i, y_{j+1})] \quad (154)$$

Für sehr kleine  $\epsilon$ -Werte findet lediglich eine Mittellung und damit eine Glättung des Fehlers in die  $y$ -Richtung statt, wie in Abbildung 42 dargestellt ist. Dadurch ist eine Vergrößerung des Gitters in die  $x$ -Richtung nicht sinnvoll.

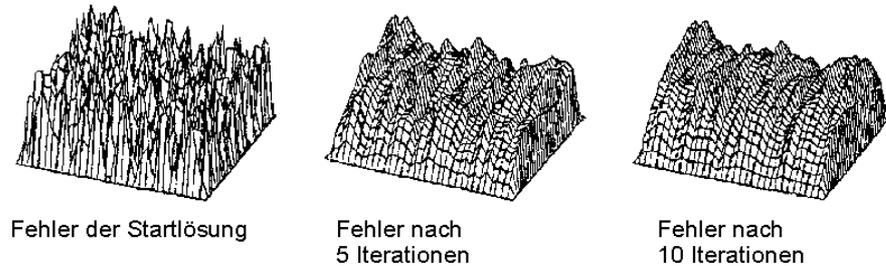


Abbildung 42: Einfluss der Gauß-Seidel-Iterationen auf den Fehler bei dem anisotropen Problem (152) (aus [33])

**Semivergrößerung und Punkt-Glätter** Ein naheliegendes Vorgehen liegt darin, wie bisher mit dem Gauß-Seidel-Verfahren die Fehler an den einzelnen Gitterpunkten nacheinander zu glätten und das Gitter nur in die Richtung zu vergrößern, in die der Fehler glatt ist. In dem hier besprochenen Fall darf nur in die  $y$ -Richtung vergrößert werden,  $H_x = h$  und  $H_y = 2h$ . Man nennt diese Art der Vergrößerung *Semivergrößerung in  $y$ -Richtung* (siehe Abb. 43).

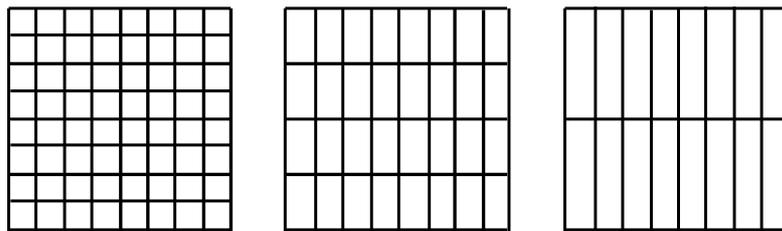


Abbildung 43: Zwei Semivergrößerungen in die  $y$ -Richtung von  $h_x = \frac{1}{8}$  und  $h_y = \frac{1}{8}$  ausgehend (aus [33])

Im Folgenden besteht jeder Glättungsschritt aus vier Teilschritten. In jedem Teilschritt wird in einer anderen "Ecke" des Gitters mit der Glättung begonnen, um dann alle Unbekannten zu bestimmen. In der Abbildung (44) sind für die vier Teilglättungsschritte die Reihenfolgen, in denen die Unbekannten mit dem Gauß-Seidel-Verfahren bestimmt werden, schematisch dargestellt.

(a)	13	14	15	16	(b)	4	3	2	1
	9	10	11	12		8	7	6	5
	5	6	7	8		12	11	10	9
	1	2	3	4		16	15	14	13
(c)	16	15	14	13	(d)	1	2	3	4
	12	11	10	9		5	6	7	8
	8	7	6	5		9	10	11	12
	4	3	2	1		13	14	15	16

Abbildung 44: Die schematische Darstellung der vier Teilschritte eines Glättungsschrittes

**Linienglätter und Standardvergrößerung** Eine Möglichkeit die Standardvergrößerung beizubehalten liegt in der Verwendung von *Linienglätttern*. Bei diesen Glätttern werden alle Werte, die auf einer Linie liegen, simultan berechnet. Die Standardvergrößerung kann bei diesem Vorgehen beibehalten werden, da nach [33] der Fehler in die Richtung glatt wird, in der die unbekanntenen Werte gleichzeitig berechnet werden. Wird die Rechenvorschrift durch das Gauß-Seidel-Verfahren gegeben und die Werte zu den Gitterpunkten, die auf einer Parallelen zur  $x$ -Achse verlaufen, simultan berechnet, so spricht man von dem  *$x$ -Linien-Gauß-Seidel-Verfahren*. Entsprechend werden bei dem  *$y$ -Linien-Gauß-Seidel-Verfahren* die Werte, die auf einer Parallelen zur  $y$ -Achse verlaufen, gleichzeitig berechnet

Bei der Lösung der Black-Scholes-Gleichung und der Black-Scholes-Ungleichung besitzt man nur ein eindimensionales Gitter in jedem Zeitschritt und wendet darauf die Standardvergrößerung an. Bei der partiellen Differentialgleichung für asiatische Optionen erhält man ein zweidimensionales Gitter, das bei der amerikanischen Optionsvariante mit der Semivergrößerung vergrößert werden muss.

### 7.1.2 Ergebnisse für europäische Optionen

In Abschnitt 6.2 wurde bei der Bewertung der europäischen Optionen die Matrixgleichung (128) mit dem Gauß-Seidel-Verfahren iterativ gelöst. Im Folgenden wird bei der iterativen Lösung der Matrixgleichung (128) der Mehrgitteralgorithmus mit dem Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter verwendet.

**Beispiel 7.1** Es werden die europäischen Call- und Putoptionen aus Beispiel 6.1 bewertet, wobei diesmal der Mehrgitteralgorithmus verwendet wird. Ansonsten stimmen die Bedingungen mit denen aus Beispiel 6.1 überein. Die Werte  $V^{MG}$  für die Optionen sind in der Tabelle 26 und in der Tabelle 27 angegeben.

$\sigma$	$V^{an}$	$V^{GS}$	Iterationen pro Zeitschritt	$V^{MG}$	Iterationen pro Zeitschritt
0.01	0.95	0.95	3	0.95	1
0.1	1.03	1.03	21	1.03	3
0.2	1.32	1.32	57	1.32	3
0.3	1.67	1.67	105	1.67	3
0.4	2.03	2.03	162	2.03	3

Tabelle 26: Die Werte für einen europäischen Call auf Aktien mit verschiedenen Volatilitäten

$\sigma$	$V^{an}$	$V^{GS}$	Iterationen pro Zeitschritt	$V^{MG}$	innere Iterationen
0.1	0.07	0.07	6	0.07	1
0.2	0.37	0.37	18	0.37	2
0.3	0.72	0.72	53	0.72	3
0.4	1.08	1.08	132	1.08	3

Tabelle 27: Die Werte für einen europäischen Put auf Aktien mit verschiedenen Volatilitäten

Die Ergebnisse zeigen, dass die Konvergenzgeschwindigkeit des Lösungsverfahrens durch den Mehrgitteralgorithmus beschleunigt wird. Selbst bei Aktien mit einer grösseren Volatilität nimmt die Anzahl der Iterationen nur minimal zu.

## 7.2 Mehrgitter für nicht lineare partielle Differentialgleichungen

Im Folgenden wird der Fall einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung für eine beliebige Funktion  $u$ ,

$$N_h u_h = f_h \quad (\Omega) \quad (155)$$

$$u_h = f_h \quad (\partial\Omega) \quad (156)$$

betrachtet. Bei der iterativen Lösung dieser nicht linearen Differentialgleichung wird als Mehrgittermethode das *Full Approximation Scheme (FAS)* verwendet. Die Idee dieses Schemas wird zuerst wieder anhand der Zweigittermethode beschrieben und kann dann

entsprechend dem linearen Fall zum Mehrgitterverfahren erweitert werden (vergleiche [6], [33]).

In dem nicht linearen Fall erhält man für den geglätteten Fehler  $\bar{e}_h^m$  nach dem  $m$ -ten Iterationsschritt auf dem feinen Gitter die Gleichung

$$N_h(\bar{u}_h^m + \bar{e}_h^m) - N_h \bar{u}_h^m = f_h - N_h \bar{u}_h^m = \bar{d}_h^m . \quad (157)$$

Auf dem gröberen Gitter  $\Omega_H$  wird diese Gleichung durch

$$N_H(\bar{u}_H^m + \bar{e}_H^m) - N_H \bar{u}_H^m = \bar{d}_H^m \quad (158)$$

approximiert. Für die Grobgittergleichung gilt daher

$$N_H u_H = F_H , \quad (159)$$

wobei die rechte Seite  $F_H$  durch

$$F_H = I_h^H(f_h - N_h \bar{u}_h^m) + N_H I_h^H \bar{u}_h^m \quad (160)$$

gegeben ist und mit  $u_H$  die volle Approximation auf dem gröberen Gitter angedeutet wird.

Nachdem  $\hat{u}_H^m$  als Approximation oder exakte Lösung von  $u_H$  auf dem groben Gitter ermittelt wurde, kann der Fehler  $\hat{e}_H^m = \hat{u}_H^m - I_h^H \bar{u}_h^m$  bestimmt, auf das feine Gitter interpoliert und zu der dortigen Approximation addiert werden, um die verbesserte Approximation  $u_h^{m+1} = \bar{u}_h^m + I_h^H \hat{e}_H^m$  zu erhalten. Das FAS-Zweigitterschema ist in Abbildung (45) dargestellt.

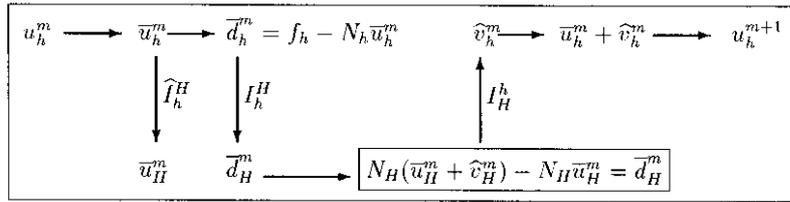


Abbildung 45: Die FAS Zweigittermethode (aus [33]). In dieser Darstellung wird der Fehler mit  $v$  und nicht mit  $e$  bezeichnet.

Für die Restriktion wird wieder die Injektion und für die Interpolation die bilineare Interpolation verwendet.

Wie im linearen Fall ergibt sich das FAS-Mehrgitterschema rekursiv aus dem FAS-Zweigitterschema.

### 7.2.1 Anwendung des PFAS auf das lineare Komplementaritätsproblem

Bei der Behandlung des linearen Komplementaritätsproblems (133) wird durch einige Iterationen mit dem Projektions-Gauß-Seidel-Verfahren der Fehler der Approximation geglättet. Im  $m$ -ten Iterationsschritt besitzt die geglättete Approximation  $\bar{V}_h^m$  den Fehler  $\bar{e}_h^m$ . Dieser glatte Fehler erfüllt das lineare Komplementaritätsproblem

$$\begin{aligned} \bar{e}_h^m + \bar{V}_h^m - G_h &\geq 0 \\ A_h \bar{e}_h^m - \bar{d}_h^m &\geq 0 \\ (A_h \bar{e}_h^m - \bar{d}_h^m)(\bar{e}_h^m + \bar{V}_h^m - G_h) &= 0 \\ \text{mit } \bar{d}_h^m &= \bar{B}_h^{m-1} - A_h \bar{V}_h^m \end{aligned} \quad (161)$$

Auf einem Gitter mit der Schrittweite  $H$  wird der Fehler  $\bar{e}_h^m$  durch den Fehler  $\bar{e}_H^m$  approximiert. Dieser Fehler erfüllt das lineare Komplementaritätsproblem

$$\begin{aligned} \bar{e}_H^m + I_h^H \bar{V}_h^m - I_h^H G_h &\geq 0 \\ A_H \bar{e}_H^m - I_h^H \bar{d}_h^m &\geq 0 \\ (A_H \bar{e}_H^m - I_h^H \bar{d}_h^m)(\bar{e}_H^m + I_h^H \bar{V}_h^m - I_h^H G_h) &= 0 \end{aligned} \quad (162)$$

Da es sich bei dem linearen Komplementaritätsproblem um eine nicht lineare Aufgabestellung handelt, ist es vorteilhaft mit dem Full Approximation Scheme zu arbeiten. Dazu muss auf dem größeren Gitter das lineare Komplementaritätsproblem (163) gelöst werden.

$$\begin{aligned} \tilde{V}_H - G_H &\geq 0 \\ A_H \tilde{V}_H - \bar{B}_H^m &\geq 0 \\ (\tilde{V}_H - G_H)(A_H \tilde{V}_H - \bar{B}_H^m) &= 0 \\ \text{mit } \bar{B}_H^m &= I_h^H \bar{d}_h^m + A_H I_h^H \bar{V}_h^m \end{aligned} \quad (163)$$

Die Lösung  $\tilde{V}_H$  des linearen Komplementaritätsproblems (163) auf dem groben Gitter setzt sich aus der Restriktion der Approximation von dem feinen Gitter und dem Fehleranteil zusammen,  $\tilde{V}_H = \bar{e}_H^m + I_h^H \bar{V}_h^m$ . Nachdem  $\hat{V}_H^m$  als Approximation oder exakte Lösung von  $\tilde{V}_H$  bestimmt wurde kann der Fehler  $\hat{e}_H^m = \tilde{V}_H^m - I_h^H \bar{V}_h^m$  bestimmt, auf das feine Gitter interpoliert und zu der dort approximierten Lösung addiert werden, um diese zu verbessern,  $V_h^{m+1} = I_h^h \hat{e}_H^m + \bar{V}_h^m$ .

### 7.2.2 Ergebnisse für amerikanische Optionen

Mit dem PFAS-Verfahren wird bei der Bewertung der amerikanischen Optionen ein Mehrgitteralgorithmus angewendet.

**Beispiel 7.2** *Es werden die amerikanischen Putoptionen aus Beispiel 6.2 bewertet. Diesmal wird jedoch der Mehrgitteralgorithmus verwendet. Ansonsten stimmen die Bedingungen mit denen aus Beispiel 6.2 überein. Die Werte  $V^{MG}$  für die Optionen sind in der Tabelle 28 angegeben.*

$\sigma$	$V^{trans}$	$V^{GS}$	Iterationen pro Zeitschritt	$V^{MG}$	innere Iterationen
0.1	0.16	0.16	7	0.16	2
0.2	0.48	0.48	18	0.48	2
0.3	0.83	0.83	40	0.83	2
0.4	1.19	1.19	84	1.19	3

Tabelle 28: Die Werte für einen amerikanischen Put auf Aktien mit verschiedenen Volatilitäten

*Die Werte bestätigen die Ergebnisse aus Beispiel 7.1. Der Mehrgitteralgorithmus verbessert deutlich die Konvergenzgeschwindigkeit des Lösungsverfahrens. Die Anzahl der Iterationen nimmt nur gering zu, wenn die Volatilität der Aktie grösser wird.*

## 8 Numerische Lösung der partiellen Differentialgleichung und -ungleichung für asiatische Optionen

Die vorherigen Abschnitte dienten als Vorbereitung für die Bewertung der asiatischen Optionen. Es wurde gezeigt, dass sich für die Diskretisierung des Konvektionsterms das Upwind-Schema-zweiter-Ordnung mit dem van Leer Limiter am besten eignet. Wählt man zusätzlich für die Zeitdiskretisierung das  $\theta$ -BDF2-Schema mit  $\theta = 0.75$ , so liefert das Verfahren eine stabile Lösung und besitzt eine CFL-Bedingung für die Monotonie, die größer ist, als die des impliziten BDF2-Verfahrens. Weiterhin wurde gezeigt, dass das freie Randwertproblem, das bei der Behandlung der amerikanischen Optionsvarianten entsteht, mit dem Projektions-Gauß-Seidel-Algorithmus effizient gelöst werden kann. Außerdem wurde demonstriert, dass ein Mehrgitteralgorithmus das Lösungsverfahren wesentlich beschleunigt. Die gewonnenen Erkenntnisse werden in diesem Abschnitt verwendet, um die zweidimensionale partielle Differentialgleichung und Differentialungleichung für kontinuierliche asiatische Optionen lösen zu können.

Entsprechend dem bisherigen Vorgehen werden zuerst die asiatischen Optionen vom europäischen Typ und dann die amerikanische Variante behandelt.

### 8.1 Asiatische Optionen vom europäischen Typ

Führt man die gleiche Transformation für den Zeitparameter durch wie in Kapitel 6, so erhält man für die kontinuierlichen asiatischen Optionen die vorwärtsgerichtete partielle Differentialgleichung:

$$V_t = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - \frac{A-S}{(T-t)}V_A - rV \quad (164)$$

Die partielle Differentialgleichung (164) unterscheidet sich von der Black-Scholes-Gleichung durch den Konvektionsterm in die  $A$ -Richtung  $\frac{A-S}{(T-t)}V_A$ . Dieser Term sorgt dafür, dass die Sprungbedingung kontinuierlich erfüllt wird.

Zum Zeitpunkt  $t = T$  besitzt der Konvektionsterm eine Singularität. Das ist aber nicht problematisch, da es sich bei diesem Zeitpunkt um den "Geburtsstermin" der Option handelt, der Aktienkurs und der aktuelle Durchschnittswert für den Kurs daher gleich gross sind.

Da der Konvektionsterm an diesem Zeitpunkt verschwindet, muss nur die Black-Scholes-Gleichung entlang der Diagonalen  $S = A$  gelöst werden.

### 8.1.1 Die Diskretisierung des Konvektionsterms

Bei der partiellen Differentialgleichung für asiatische Optionen handelt es sich um eine zweidimensionale Konvektions-Diffusions-Gleichung. Da in A-Richtung kein Diffusionsterm existiert, ist die Differentialgleichung in dieser Richtung konvektionsdominant. Die Untersuchungen in Abschnitt 6.1.2 haben gezeigt, dass bei konvektionsdominanten Problemen der Konvektionsterm mit der Upwind-Diskretisierung zweiter Ordnung und der Verwendung des van Leer Limiters  $\psi(q)$  (siehe in Abschnitt 6.1.2 (108)) diskretisiert werden sollte. In diesem Fall erhält man zufriedenstellende Ergebnisse bezüglich der Genauigkeit.

Der Informationsfluss in A-Richtung wird durch den Konvektionsterm  $\frac{A-S}{(T-t)}V_A$  bestimmt. Für ihn bestehen drei Möglichkeiten:

- $S = A$ :  
Es findet kein Informationsfluss in A-Richtung statt
- $S > A$ :  
Es findet ein Informationsfluss in negativer A-Richtung statt
- $S < A$ :  
Es findet ein Informationsfluss in positiver A-Richtung statt

In jedem Zeitschritt fließen die Informationen von der Diagonalen  $S = A$  in positiver beziehungsweise negativer A-Richtung nach außen. Die unterschiedlichen Flussrichtungen müssen bei der Upwind-Diskretisierung berücksichtigt werden. Im Folgenden wird der Konvektionsfaktor durch  $b = \frac{(A-S)}{(T-t)}$  ersetzt.

- $S = A \Rightarrow b = 0$

- $S > A \Rightarrow b < 0$  :

$$\begin{aligned}
bV_A &= \frac{b}{h}(V_{i,j+1} - V_{i,j}) + \frac{b}{2h}(V_{i,j+1} - V_{i,j})\psi(q_{i,j+\frac{1}{2}}) \\
&\quad - \frac{b}{2h}(V_{i,j+2} - V_{i+1})\psi(q_{i,j+\frac{3}{2}}) \quad (165) \\
q_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{(V_{i,j} - V_{i,j-1})}{(V_{i,j+1} - V_{i,j})}, \quad q_{i,j+\frac{3}{2}} = \frac{(V_{i,j+1} - V_{i,j})}{(V_{i,j+2} - V_{i,j+1})}
\end{aligned}$$

- $S < A \Rightarrow b > 0$  :

$$\begin{aligned}
bV_A &= \frac{a}{h}(V_{i,j} - V_{i,j-1}) + \frac{b}{2h}(V_{i,j} - V_{i,j-1})\psi(q_{i,j-\frac{1}{2}}) \\
&\quad - \frac{b}{2h}(V_{i,j-1} - V_{i-2})\psi(q_{i,j-\frac{3}{2}}) \quad (166) \\
q_{i,j-\frac{1}{2}} &= \frac{(V_{i,j+1} - V_{i,j})}{(V_{i,j} - V_{i,j-1})}, \quad q_{i,j-\frac{3}{2}} = \frac{(V_{i,j} - V_{i,j-1})}{(V_{i,j-1} - V_{i,j-2})}
\end{aligned}$$

### 8.1.2 Die Anfangs- und Randbedingungen

Da weder der Aktienkurs noch sein Mittelwert unendlich große Werte annehmen, wird das Gebiet in der S-A-Ebene, über dem die Lösungsfläche bestimmt werden soll, in den Bereich  $\Omega = [0, S^{max}] \times [0, A^{max}]$  eingegrenzt. Um den Fehler, der durch diese Einschränkung entsteht, zu reduzieren müssen  $A^{max}$  und  $S^{max}$  ausreichend gross gewählt werden. Die Grenzen sollten mindestens zwei bis drei mal so gross sein wie der Ausübungswert der Option oder der betrachtete Aktienkurs  $S_0$ .

Wie bei den Standardoptionen ist die Anfangsbedingung der Anfangs-Randwertaufgabe durch die Auszahlungsfunktion der betrachteten Option (siehe Kapitel 5) gegeben. Aus der Anfangsbedingung ergibt sich auch die Anfangsrandbedingung. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt für

- $S = 0$  :

$$\begin{aligned}
V(0, A, 0) &= G(0, A, 0) \quad (167) \\
A &\in [0, A^{max}]
\end{aligned}$$

- $S = S^{max}$  :

$$\begin{aligned}
V(S^{max}, A, 0) &= G(S^{max}, A, 0) \quad (168) \\
A &\in [0, A^{max}]
\end{aligned}$$

- $A = 0$  :

$$\begin{aligned} V(S, 0, 0) &= G(S, 0, 0) & (169) \\ S &\in [0, S^{max}] \end{aligned}$$

- $A = A^{max}$  :

$$\begin{aligned} V(S, A^{max}, 0) &= G(S, A^{max}, 0) & (170) \\ S &\in [0, S^{max}] \end{aligned}$$

Die Randwerte bei  $S = 0$  und  $S = S^{max}$  für  $t > 0$  ergeben sich aus der Sprungbedingung. Für den Fall  $S = 0$  erhält man aus der partiellen Differentialgleichung (164) die reduzierte Differentialgleichung

$$V_t = -\frac{A}{(T-t)}V_A - rV . \quad (171)$$

In der Literatur gibt es keine Aussage über eine anerkannte Regel für das Verhalten des Optionswertes am Rand  $S = S^{max}$ . Daher ist es wichtig, diesen Rand weit genug entfernt vom betrachteten Aktienkurs zu wählen. Da die Sprungbedingung an dem Rand auf jeden Fall erfüllt sein muss, kann dieser mit der partiellen Differentialgleichung

$$V_t = -\frac{A - S^{max}}{(T-t)}V_A \quad (172)$$

in jedem Zeitschritt aktualisiert werden.

Bei der Betrachtung des Konvektionsterms  $\frac{A-S}{(T-t)}V_A$  hat sich gezeigt, dass die Informationen von der Diagonalen  $S = A$  aus in die A-Richtung nach außen fließen. Wählt man ein quadratisches Gebiet ( $A^{max} = S^{max}$ ), dann ergeben sich die Randwerte bei  $A = 0$  und  $A = A^{max}$  aus der Lösung der partiellen Differentialgleichung (164). Die Aufgabe der Randbedingung übernimmt in diesem Fall die Hauptdiagonale  $S = A$ . Von ihr fließen alle Informationen in die positive und negative A-Richtung nach aussen weg. An den Rändern  $A = 0$  und  $A = A^{max}$  kann jedoch nicht ohne weiteres die Upwind-Diskretisierung-zweiter-Ordnung verwendet werden da Werte, die ausserhalb des Gitters liegen, benötigt würden. Man kann statt dessen die Randwerte mit einem Extrapolationsverfahren der entsprechenden Ordnung aus den inneren Werten extrapolieren.

### 8.1.3 Anwendung des Mehrgitterverfahrens

Die partielle Differentialgleichung für die asiatischen Optionen löst man auf einem zweidimensionalen Gitter. Da dieses Problem einen

Diffusionsterm nur in die  $S$ -Richtung besitzt, bieten sich für die Glättung und die Vergrößerung die zwei Kombinationen an, die in Abschnitt 7.1.1 angesprochen wurden. Entweder verwendet man das Punktweise-Gauß-Seidel-Verfahren zusammen mit der Semivergrößerung in  $S$ -Richtung oder man kombiniert das Linien-Gauß-Seidel-Verfahren mit der Standardvergrößerung.

Die zweite Alternative besitzt den Vorteil, dass der Fehler in beide Richtungen geglättet wird und durch die Standardvergrößerung weniger Werte auf den größeren Gittern zu bestimmen sind. Auf Grund der Wahl der Diskretisierungen muss bei der Anwendung des Linienglätters für jeden Block ein Gleichungssystem mit Hilfe einer Tridiagonalmatrix gelöst werden. Die exakte Lösung eines Tridiagonalsystems erfordert relativ wenig Rechenaufwand. Im Fall des  $A$ -Linien-Gauß-Seidel-Verfahrens verringert sich außerdem die Anzahl der Rechenoperationen. Zur Verdeutlichung muss man dafür die Gitterwerte betrachten, die bei der Berechnung des Wertes an der Stelle  $(S_i, A_j)$  Einfluss nehmen. Dazu wird ein Stencil verwendet, in dem die Einfluss nehmenden Gitterwerte mit einem  $X$  gekennzeichnet sind.

Da die partielle Differentialgleichung für die kontinuierlichen asiatischen Optionen in die  $A$ -Richtung nur einen Konvektionsterm besitzt, erhält man für die Gitterpunkte oberhalb der Diagonalen  $S = A$  Gleichungen der Form (173) und für die Punkte unterhalb der Diagonalen Gleichungen der Form (174) und für die Diagonalgitterpunkte Gleichungen der Form (175).

$$\begin{bmatrix} 0 \\ X & X & X \\ X \end{bmatrix}_h V_h(S_i, A_j) = f_h(S_i, A_j) \quad (i < j) \quad (173)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ X & X & X \\ 0 \end{bmatrix}_h V_h(S_i, A_j) = f_h(S_i, A_j) \quad (i > j) \quad (174)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ X & X & X \\ 0 \end{bmatrix}_h V_h(S_i, A_j) = f_h(S_i, A_j) \quad (i = j) \quad (175)$$

Betrachtet man die Stencilformen (173), (174) und (175), dann ergibt sich für jeden Block von Gitterwerten, die simultan bestimmt

werden sollen, ein Gleichungssystem in Bidiagonalform. Auf Grund dieser Struktur kann das Gleichungssystem mit wenig Rechenaufwand direkt gelöst werden.

#### 8.1.4 Ergebnisse

Im Folgenden werden asiatische Optionen vom europäischen Typ bewertet. Dafür wird die partielle Differentialgleichung

$$V_t = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - \frac{A-S}{(T-t)}V_A - rV \quad (176)$$

mit den in Kapitel 6 und Abschnitt 8.1.1 besprochen Diskretisierungen diskretisiert. Für den Zeitterm wird das  $\theta$ -BDF2-Schema mit  $\theta = 0.75$  gewählt und die beiden Konvektionsterme werden mit dem Zweite-Ordnung-Upwind-Schema diskretisiert und dabei der van Leer Limiter verwendet.

Die Bewertungen wurden auf einem PC mit einem Pentium 3 Prozessor mit 700 Mhz durchgeführt. Der Code des C-Programmes, der dafür verwendet wurde, ist in Anhang A dargestellt.

**Die Marktwerte** Die floating strike und fixed strike Optionen vom europäischen Typ, deren Werte in Tabelle 29 bis Tabelle 36 angegeben werden, beziehen sich auf Aktien mit dem aktuellen Kurs  $S_0 = 100$  €. Die Aktien besitzen die Volatilität  $\sigma = 0.1$  beziehungsweise  $\sigma = 0.2$ . Alle betrachteten Optionen haben ihren Ausübungszeitpunkt in  $T = 1$  Jahr und der risikolose Zinssatz beträgt  $r = 0.1$ . Der Ausübungspreis der fixed strike Optionen liegt bei  $K = 100$  €.

**Der Lösungsbereich und die Schrittweiten** Der Lösungsbereich ist durch  $S^{max} = A^{max} = 250$  € eingeschränkt. Damit liegen die Grenzen bei dem 2.5-fachen Wert des aktuellen Aktienkurses beziehungsweise des Ausübungspreises der Optionen und sind für die betrachteten Volatilitäten ausreichend groß gewählt. Die Raumschrittweiten wurden mit  $\delta S = \delta A = 1$  festgelegt. Für die Zeitschrittweite wurde  $\delta t = 0.01$  gewählt, die Bewertung erfolgt also in 100 Zeitschritten.

**Die Vergleichskriterien** Es werden der Mehrgitteralgorithmus mit dem punkweisen Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter und der Semivergrößerung  $MG_{PGS}$  (siehe Abschnitt 7.1), der Mehrgitteralgorithmus mit dem Linien-Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter und der

Standardvergrößerung  $MG_{LGS}$  (siehe Abschnitt 7.1) und der Singlegridalgorithmus mit dem Gauß-Seidel-Verfahren als Löser  $SG_{GS}$  miteinander verglichen. In dem Mehrgitteralgorithmus mit der punkweisen Glättung wird der Vier-Richtungs-Glätter angewendet (siehe Abschnitt 7.1.1), wodurch jeder Glättungsschritt aus vier Gauß-Seidel-Iterationen besteht. Da bei dem Singlegridalgorithmus das Gauß-Seidel-Verfahren nicht als Glätter sondern als iteratives Lösungsverfahren verwendet wird, besteht jede innere Iteration aus nur einer Gauß-Seidel-Iteration.

Der Vergleich der Verfahren bezieht sich zum Einen auf die Anzahl der inneren Iterationen (siehe Abschnitt 6.1.3), die diese Verfahren im Durchschnitt benötigen, um das Residuum der entsprechenden Startlösung um den Faktor  $10^{-4}$  zu reduzieren. Zum anderen wird die Zeit, in der die Verfahren die Optionen bewerten, betrachtet. Die CPU-Zeit wird in Sekunden (*Sek*) angegeben.

**Die Referenzen** Als Referenzwerte werden die Ergebnisse von Zvan, Forsyth und Vetzal aus [39] (angedeutet mit Z/F/V) und die Ergebnisse von Barraquand und Pudet aus [3] (B/P) angegeben. Z/F/V wenden ein Verfahren an, dass dem hier angewandten bezüglich der Raumdiskretisierung ähnelt. Für die Zeitdiskretisierung verwenden sie das Crank-Nicolson-Verfahren und die iterative Lösung erfolgt mit dem präkonditionierten Verfahren der konjugierten Gradienten (PCG) mit der ILU Vorkonditionierung. B/P benutzen in [3] die sogenannte "Forward Shooting Method".

**Beispiel 8.1** *Europäische floating strike Putoptionen:*

	$MG_{PGS}$	$MG_{LGS}$	$SG_{GS}$	B/P	Z/V/F
$V_0$	0.59	0.59	0.59	0.61	0.59
innere Iterationen	1	1	28.5		
CPU-Zeit (Sek)	238	233	466		

Tabelle 29: Die Werte einer europäischen floating strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	$MG_{PGS}$	$MG_{LGS}$	$SG_{GS}$	B/P	Z/V/F
$V_0$	2.44	2.44	2.44	2.49	2.42
innere Iterationen	1.56	1	65.8		
CPU-Zeit (Sek)	321	251	872		

Tabelle 30: Die Werte einer europäischen floating strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

**Beispiel 8.2** *Europäische floating strike Calloptionen:*

	MG <sub>PGS</sub>	MG <sub>LGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	5.42	5.42	5.42	5.38
innere Iterationen	2	1	55.1	
CPU-Zeit (Sek)	389	221	763	

Tabelle 31: Die Werte einer europäischen floating strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	MG <sub>PGS</sub>	MG <sub>LGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	7.28	7.28	7.28	7.26
innere Iterationen	2	1	85.3	
CPU-Zeit (Sek)	391	233	547	

Tabelle 32: Die Werte einer europäischen floating strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

**Beispiel 8.3** *Europäische fixed strike Putoptionen:*

	MG <sub>PGS</sub>	MG <sub>LGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	0.57	0.57	0.57	0.57
innere Iterationen	1.5	1	33.2	
CPU-Zeit (Sek)	369	253	592	

Tabelle 33: Die Werte einer europäischen fixed strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	MG <sub>PGS</sub>	MG <sub>LGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	2.36	2.36	2.36	2.37
innere Iterationen	1.6	1	56	
CPU-Zeit (Sek)	337	236	762	

Tabelle 34: Die Werte einer europäischen fixed strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

**Beispiel 8.4** *Europäische fixed strike Calloptionen:*

	MG <sub>PGS</sub>	MG <sub>LGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P	Z/V/F
$V_0$	5.25	5.25	5.25	5.28	5.26
innere Iterationen	2	1	53.9		
CPU-Zeit (Sek)	386	235	727		

Tabelle 35: Die Werte einer europäischen fixed strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	MG <sub>PGS</sub>	MG <sub>LGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P	Z/V/F
$V_0$	7.04	7.04	7.04	7.08	7.04
innere Iterationen	2	1	84.1		
CPU-Zeit (Sek)	396	228	1058		

Tabelle 36: Die Werte einer europäischen fixed strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

Die Ergebnisse für die Optionswerte in den Beispielen 8.1 bis 8.4 stimmen sehr gut mit den Referenzwerten aus [3] und [39] überein. Bei dem Vergleich der Anzahl der benötigten inneren Iterationen und der gesamten Rechenzeit der Verfahren zeigt sich, dass der Einsatz des Mehrgitteralgorithmus zu einer schnelleren Konvergenz und damit zu einer kürzeren Rechenzeit führt als der Singlegridalgorithmus. Dabei ist der Linienglätter kombiniert mit der Standardvergrößerung bei dem Mehrgitterverfahren zu bevorzugen.

Das Verhalten der Lösungsfläche für eine europäischen floating strike Putoption im Laufe der Zeit wird in den Abbildungen 46 bis 50 dargestellt. Für den letzten Zeitschritt  $t = 100$  erhält man eine eindimensionale Lösungskurve entlang der Diagonalen  $S = A$ , die mit der Black-Scholes-Gleichung gelöst wird, da in diesem Zeitpunkt der Konvektionsterm in die A-Richtung wegfällt.

Die Abbildungen zeigen das typische Verhalten des Preises von asiatischen Optionen. In ihrer Anfangsphase finden die größten Änderungen des Optionspreises statt während zum Ende ihrer Lebensdauer ihr Preis relativ stabil bleibt, da sich die Kursschwankungen dann nur noch minimal auf den Mittelwert auswirken. Einen bedeutenden Einfluss hat dabei die Sprungbedingung. Bei der Lösung der Anfangs-Randwertaufgabe läuft der Zeitparameter von  $t = 0$  bis  $t = T$ , wobei  $t = 0$  den Verfallstermin der Option angibt und  $t = T$  den Geburtstermin<sup>6</sup>. Für größer werdende  $t$ -Werte wächst der Konvektionsterm  $\frac{A-S}{(T-t)}V_A$  und damit sein Einfluss auf die Lösung an. Besonders in dem letzten Viertel der Laufzeit, also in der Anfangsphase der Option, verringert sich dabei die CFL-Bedingung und man muss auf die geeigneten Raum- und Zeitschrittweiten achten, um eine gute Approximation der Lösung zu erhalten.

<sup>6</sup>Mit  $t$  wird der transformierte Zeitparameter bezeichnet. Vergleiche dazu Kapitel 6

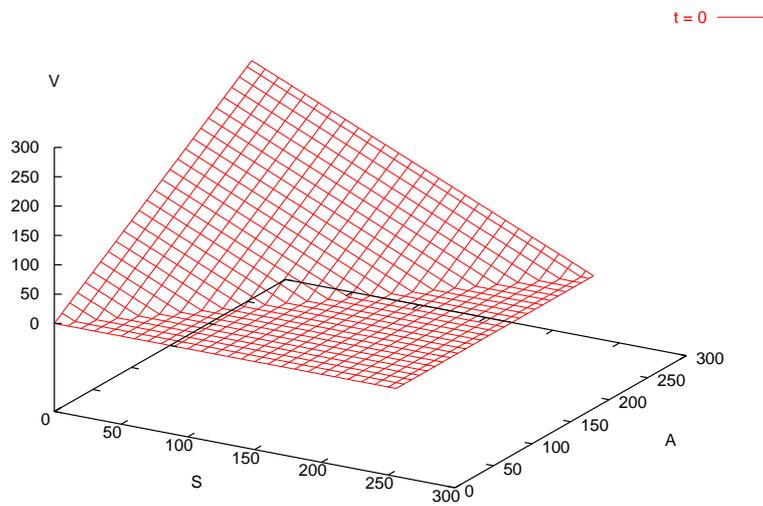


Abbildung 46: Die Anfangsbedingung für eine europäischen floating strike Putoption

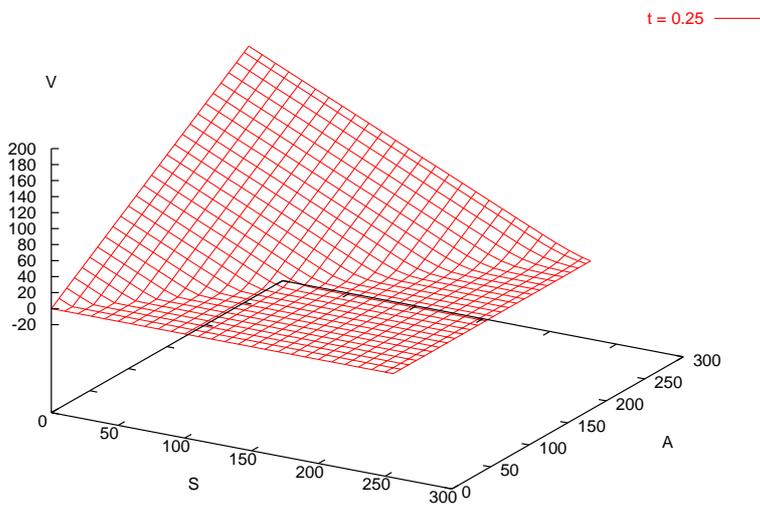


Abbildung 47: Die Lösungsfläche für eine europäischen floating strike Putoption nach 25 Zeitschritten

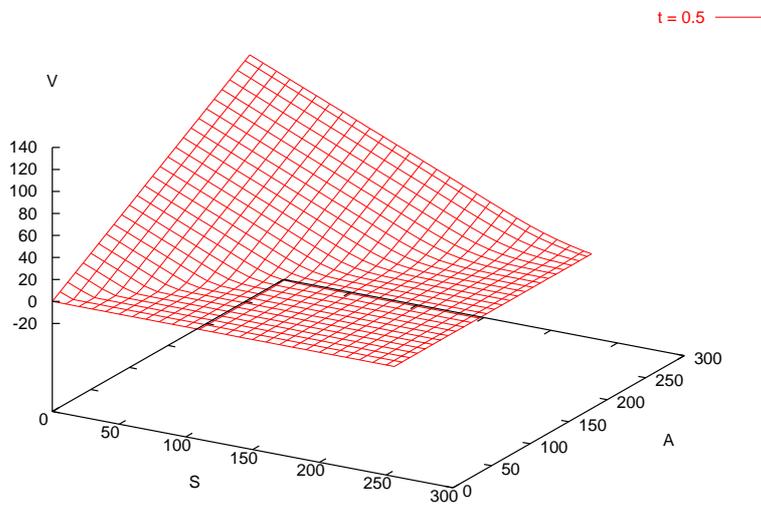


Abbildung 48: Die Lösungsfläche für eine europäischen floating strike Putoption nach 50 Zeitschritten

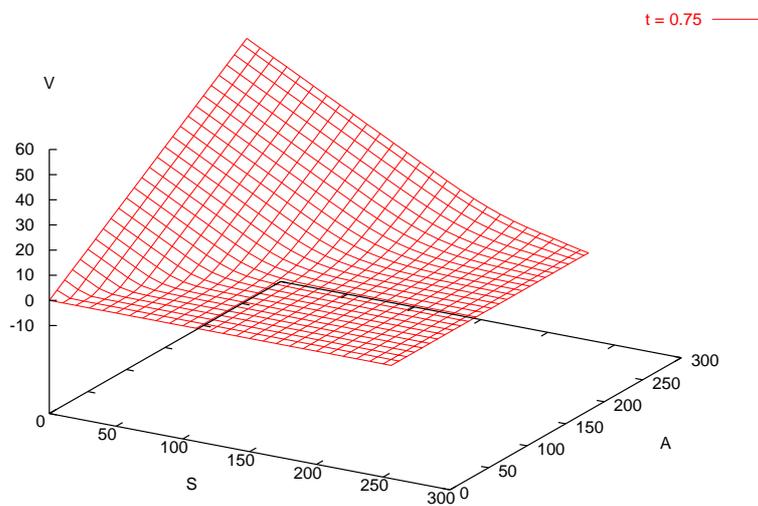


Abbildung 49: Die Lösungsfläche für eine europäischen floating strike Putoption nach 75 Zeitschritten

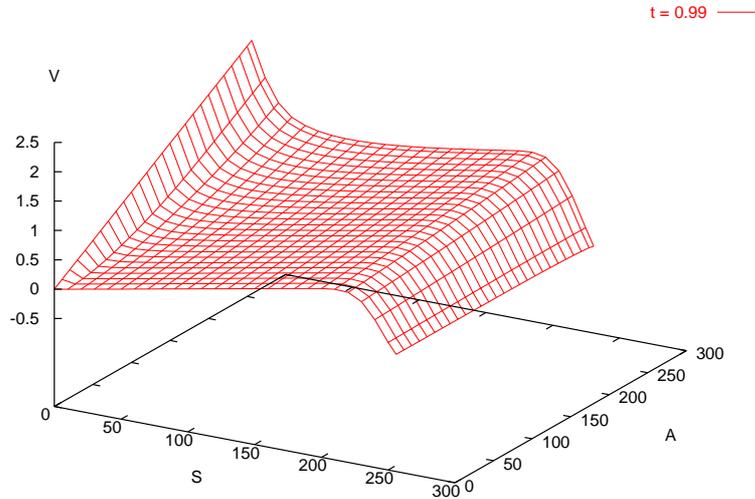


Abbildung 50: Die Lösungsfläche für eine europäischen floating strike Putoption nach 99 Zeitschritten

## 8.2 Asiatische Optionen vom amerikanischen Typ

Genauso wie bei den amerikanischen Standardoptionen aus der Black-Scholes-Gleichung eine Ungleichung wird, erhält man für die asiatischen Optionen vom amerikanischen Typ aus der partiellen Differentialgleichung (164) die partielle Differentialungleichung

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}V = V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rSV_S + \frac{A-S}{(T-t)}V_A + rV \geq 0. \quad (177)$$

Auch diese Ungleichung kann als lineares Komplementaritätsproblem in der Form

$$\begin{aligned} V(P) - G(P) &\geq 0 \\ \mathcal{L}_{\mathcal{A}}V(P) &\geq 0 \\ (V(P) - G(P))(\mathcal{L}_{\mathcal{A}}V(P)) &= 0 \\ P &\in \Omega \end{aligned} \quad (178)$$

dargestellt und mit dem Projektions-Gauß-Seidel-Algorithmus (siehe Abschnitt 6.3.1) beziehungsweise mit dem PFAS (siehe Abschnitt 7.2.1) gelöst werden.

Während der Anwendung dieser Verfahren muss die punktweise Projektion der berechneten Werte durchgeführt werden. Dies führt zu

Problemen, falls in dem Mehrgitteralgorithmus ein Linienglätter verwendet wird. Das Verfahren divergiert in diesem Fall. Man sollte einen Detektionsmechanismus einsetzen um zuerst den freien Rand zu bestimmen und nachher eine Linienrelaxation bis zu diesem Rand ausführen (siehe [8]).

Für die numerische Lösung des linearen Komplementaritätsproblems (178) wird daher das Punktweise Gauß-Seidel-Verfahren mit der Semivergrößerung kombiniert.

### 8.2.1 Ergebnisse

Im Folgenden werden asiatische Optionen vom amerikanischen Typ bewertet. Dafür wird das lineare Komplementaritätsproblem (178) mit den in Abschnitt 8.1.4 verwendeten Diskretisierungen diskretisiert. Auch die Marktwerte, der Lösungsbereich, die Schrittweiten und die Referenzen entsprechen denen aus Abschnitt 8.1.4. Die Optionswerte sind in Tabelle 37 bis Tabelle 44 angegeben.

Es werden das PFAS-Verfahren (siehe Abschnitt 7.2) mit dem punktweisen Projektions-Gauß-Seidel-Verfahren als Glätter und der Semivergrößerung  $MG_{PGS}$  und der Singlegridalgorithmus mit dem Projektions-Gauß-Seidel-Verfahren (siehe Abschnitt 6.3.1) als Löser  $SG_{GS}$  miteinander verglichen. Der Vergleich bezieht sich wieder auf die Anzahl der inneren Iterationen und die Zeit, in der die Verfahren die Optionen bewerten. Die CPU-Zeit wird in Sekunden (*Sek*) angegeben.

#### Beispiel 8.5 Amerikanische floating strike Putoptionen:

	$MG_{PGS}$	$SG_{GS}$	B/P	Z/V/F
$V_0$	1.93	1.93	1.8	1.95
innere Iterationen	1	32.4		
CPU-Zeit (Sek)	282	553		

Tabelle 37: Die Werte einer amerikanischen floating strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	$MG_{PGS}$	$SG_{GS}$	B/P	Z/V/F
$V_0$	4.98	4.98	4.81	4.93
innere Iterationen	1.4	75.5		
CPU-Zeit (Sek)	324	1012		

Tabelle 38: Die Werte einer amerikanischen floating strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

**Beispiel 8.6** *Amerikanische floating strike Calloptionen:*

	MG <sub>PGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	5.77	5.77	5.67
innere Iterationen	1	18.6	
CPU-Zeit (Sek)	281	351	

Tabelle 39: Die Werte einer amerikanischen floating strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	MG <sub>PGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	8.56	8.56	8.46
innere Iterationen	1.2	57	
CPU-Zeit (Sek)	312	786	

Tabelle 40: Die Werte einer amerikanischen floating strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

**Beispiel 8.7** *Amerikanische fixed strike Putoptionen:*

	MG <sub>PGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	1.11	1.11	1.08
innere Iterationen	1	19.4	
CPU-Zeit (Sek)	270	370	

Tabelle 41: Die Werte einer amerikanischen fixed strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	MG <sub>PGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P
$V_0$	3.20	3.20	3.18
innere Iterationen	1	51	
CPU-Zeit (Sek)	255	732	

Tabelle 42: Die Werte einer amerikanischen fixed strike Putoption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

**Beispiel 8.8** *Amerikanische fixed strike Calloptionen:*

	MG <sub>PGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P	Z/V/F
$V_0$	5.39	5.39	5.40	5.39
innere Iterationen	2	49		
CPU-Zeit (Sek)	440	703		

Tabelle 43: Die Werte einer amerikanischen fixed strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.1$

	MG <sub>PGS</sub>	SG <sub>GS</sub>	B/P	Z/V/F
$V_0$	7.55	7.55	7.52	7.55
innere Iterationen	2	94		
CPU-Zeit (Sek)	467	1189		

Tabelle 44: Die Werte einer amerikanischen fixed strike Calloption auf eine Aktie mit der Volatilität  $\sigma = 0.2$

Die Ergebnisse für die amerikanischen Optionen in den Beispielen 8.5 bis 8.8 stimmen sehr gut mit den Referenzwerten aus [39] und [3] überein. Wie in Abschnitt 8.1.4 zeigt sich bei dem Vergleich der Anzahl der benötigten inneren Iterationen und der gesamten Rechenzeit, dass der Mehrgitteralgorithmus zu einer schnelleren Konvergenz und damit zu einer kürzeren Rechenzeit führt als der Singlegridalgorithmus.

In den Abbildungen 51 bis 55 wird das Verhalten der Lösungsfläche für eine amerikanische fixed strike Calloption im Laufe der Zeit dargestellt. Wie in der Abbildungsfolge 46 bis 50 ist deutlich zu erkennen, dass der Optionspreis in seiner Anfangsphase<sup>7</sup> den größten Schwankungen unterworfen ist und stabiler wird, um so näher der Ausübungstermin rückt (vergleiche Abschnitt 8.1.4).

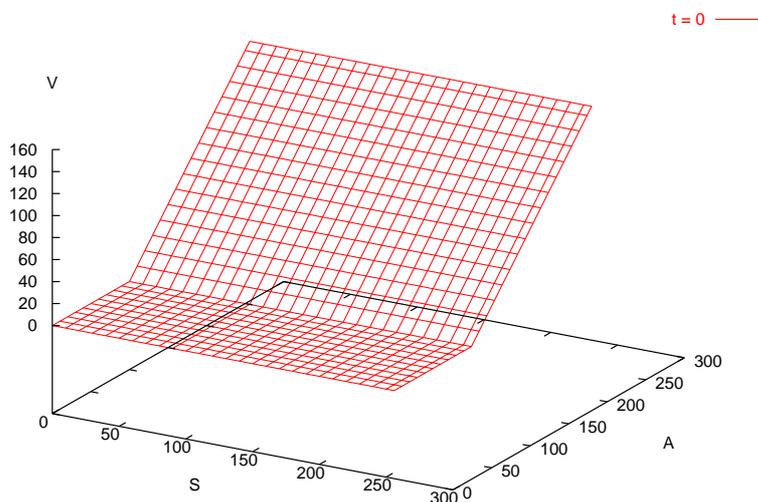


Abbildung 51: Die Anfangsbedingung für eine amerikanische fixed strike Calloption

<sup>7</sup>Die Anfangsphase der Optionslebensdauer entspricht der Endphase der numerischen Lösung (siehe Abschnitt 8.1.4)

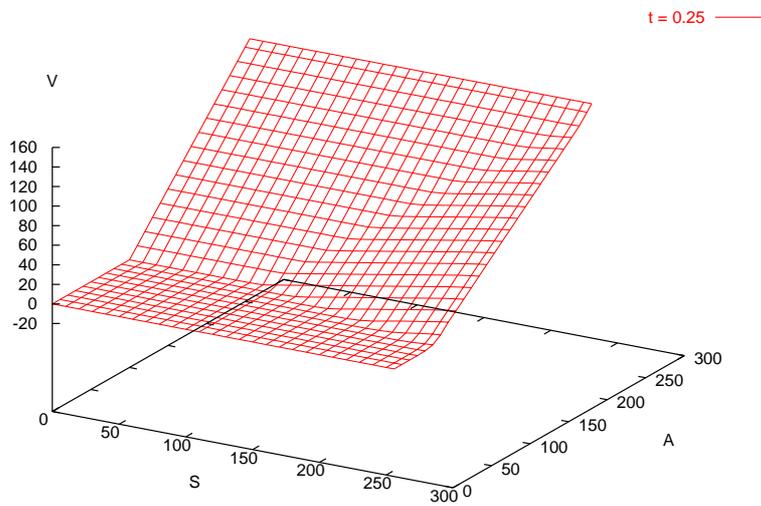


Abbildung 52: Die Lösungsfläche für eine amerikanische fixed strike Calloption nach 25 Zeitschritten

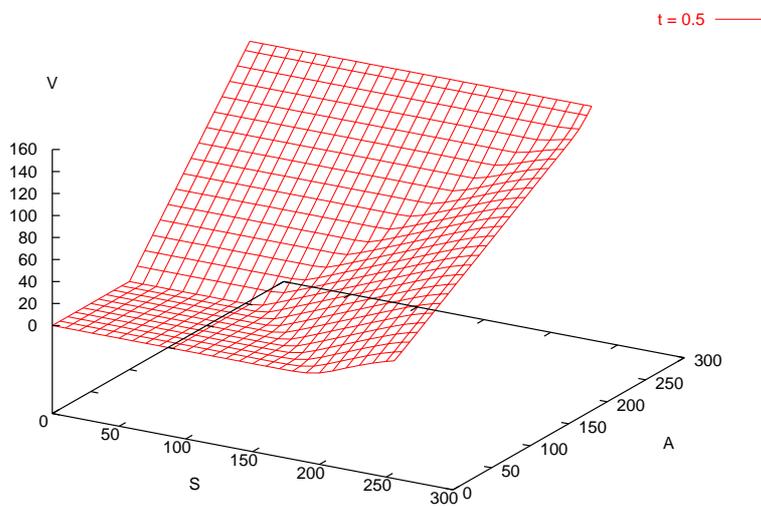


Abbildung 53: Die Lösungsfläche für eine amerikanische fixed strike Calloption nach 50 Zeitschritten

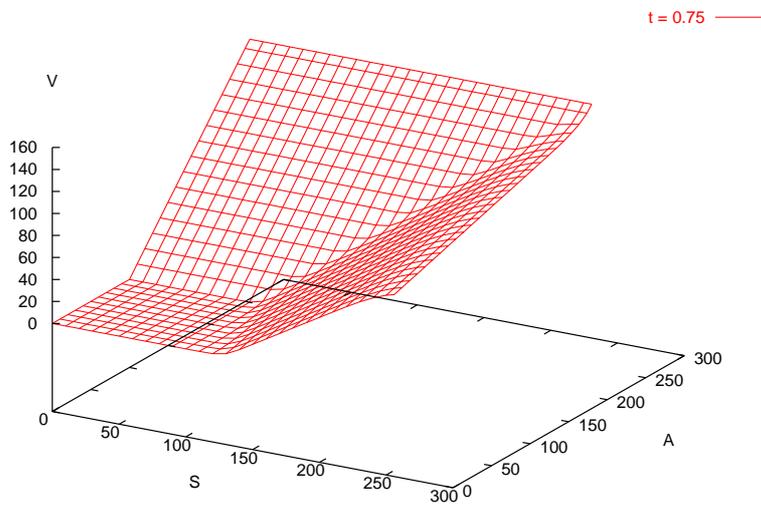


Abbildung 54: Die Lösungsfläche für eine amerikanische fixed strike Calloption nach 75 Zeitschritten

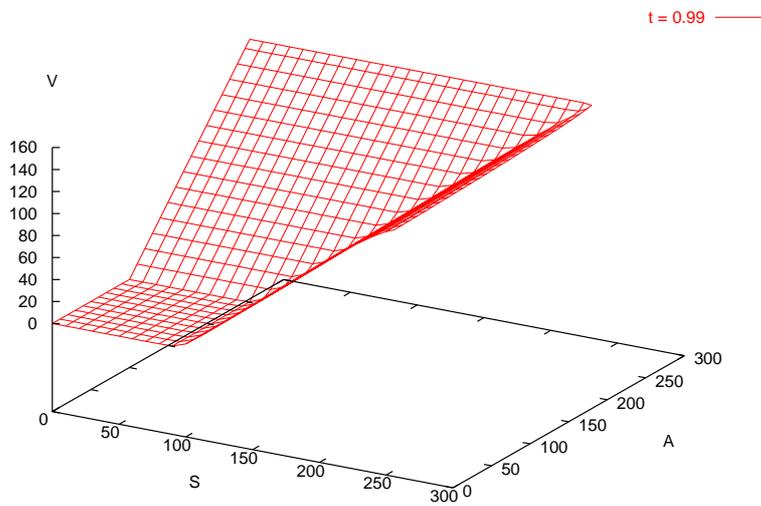


Abbildung 55: Die Lösungsfläche für eine amerikanische fixed strike Calloption nach 99 Zeitschritten

## 9 Schlussbetrachtung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren beschrieben, mit dem asiatische Optionen bewertet werden können. Die Bewertung der asiatischen Optionen vom europäischen Typ erfolgt über die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$V_t = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - \frac{A-S}{(T-t)}V_A - rV. \quad (179)$$

Der Zeitterm dieser partiellen Differentialgleichung wird mit dem  $\theta$ -BDF2-Schema diskretisiert. Mit dieser Wahl besitzt man eine flexible Zeitdiskretisierung zweiter Ordnung, die durch den Parameter  $\theta$  den impliziten und expliziten Anteil des Konvektionsterms gewichtet. Wenn es die CFL-Bedingung zulässt, kann mit dem expliziten Verfahren eine schnelle Variante bestimmt werden. Die Wahl von  $\theta = 0.75$  führt zu einem Verfahren, das für beliebige Schrittweiten eine stabile Lösung liefert und dessen CFL-Bedingung für die Monotonie größere Werte annimmt als die des impliziten BDF2-Verfahrens.

Für die beiden Konvektionsterme wird die Zweite-Ordnung-Upwind-Diskretisierung mit dem van Leer Limiter verwendet. Damit werden Oszillationen, die bei der Lösung konvektionsdominanter Differentialgleichungen entstehen können, vermieden. Durch die Anwendung des Defektkorrektur-Verfahrens geht der nicht lineare Anteil der diskretisierten Gleichung, der durch den Limiter entsteht, mit dem alten Iterationswert in die rechte Seite ein, wodurch ein linearer Operator "invertiert" werden muss.

Die Bewertung der asiatischen Optionen vom amerikanischen Typ erfolgt durch die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}_A V = V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - rSV_S + \frac{A-S}{(T-t)}V_A + rV \geq 0. \quad (180)$$

Diese partielle Differentialgleichung wird in Form des linearen Komplementaritätsproblems

$$\begin{aligned} V(P) - G(P) &\geq 0 \\ \mathcal{L}_A V(P) &\geq 0 \\ (V(P) - G(P))(\mathcal{L}_A V(P)) &= 0 \\ P &\in \Omega \end{aligned} \quad (181)$$

mit dem Projektions-Gauß-Seidel-Algorithmus gelöst.

Die numerische Bewertung der europäischen und amerikanischen

Standardoptionen erfordert viele Iterationsschritte, wenn die Volatilität der Aktie große Werte annimmt. Mit einem Mehrgitteralgorithmus wird die Anzahl der benötigten Iterationen reduziert und damit die Lösungszeit deutlich verringert. Bei der Mehrgitteranwendung kann entweder das Punktweise-Gauß-Seidel-Verfahren mit der Semivergrößerung kombiniert werden oder es wird ein Linienglätter mit der Standardvergrößerung verwendet. Im Fall der amerikanischen Variante kann nur die erste Kombination erfolgreich angewendet werden.

Als Resultat erhält man ein Verfahren, mit dem alle Varianten asiatischer Optionen vom amerikanischen und europäischen Typ in kurzer Rechenzeit auf einem PC mit geeigneter Genauigkeit bewertet werden können.

Für Optionshändler ist es von großem Interesse diese Derivate so schnell und so genau wie möglich bewerten zu können. Das besprochene Verfahren bietet diesbezüglich noch einige Erweiterungsmöglichkeiten.

Eine weitere Beschleunigung der Rechenzeit kann durch die Verwendung lokaler Verfeinerungen im Raum und in der Zeit erzielt werden. Bei der lokalen Verfeinerung im Raum müssen die Bereiche, in denen sich die Option am Geld befindet, berücksichtigt werden. Für die lokale Verfeinerung in der Zeit kommt der Zeitraum unmittelbar nach der "Geburt" der Option in Frage. Die CFL-Bedingung der vorwärtsgerichteten partiellen Differentialgleichung ist in dieser Zeitspanne am kleinsten, da der Quotient  $\frac{1}{T-t}$  und damit der Konvektionsterm in die  $A$ -Richtung seine größten Werte annimmt<sup>8</sup>. Je weiter der betrachtete Zeitpunkt von dem Geburtstermin der Option entfernt liegt, desto kleiner wird der Quotient, wodurch der Wert der CFL-Bedingung ansteigt und größere Zeitschrittweiten zulässt. Verwendet man bei dem Mehrgitteralgorithmus die Semivergrößerung mit dem Vier-Richtungs-Glätter, dann werden in jedem Glättungsschritt vier Gauß-Seidel-Iterationen durchgeführt. Dieser Glätter ist sehr robust aber auch sehr zeitaufwendig und kann daher durch schnellere Glätter ersetzt werden. Bei Aktien mit einer niedrigen Volatilität reicht es unter Umständen aus mit nur zwei oder drei Gauß-Seidel-Iterationen in jedem Glättungsschritt zu glätten.

---

<sup>8</sup>Der Zeitparameter  $t$  läuft auf Grund der Transformation vom Verfallstermin der Option  $t = 0$  bis zu ihrem Geburtstermin  $t = T$

## Literatur

- [1] H. Ahn and P. Wilmott, *On trading american options*. Arbeitspapier Nr. 1999-MF-01, Math. Fin. Group, Oxford University, Oxford (1999)  
<http://www.maths.ox.ac.uk/mfg/mfg/mfghome.htm>
- [2] H. Ahn and P. Wilmott, *Exercise class*. Arbeitspapier Nr. 1999-MF-22, Math. Fin. Group, Oxford University, Oxford (1999)  
<http://www.maths.ox.ac.uk/mfg/mfg/mfghome.htm>
- [3] J. Barraquand and T. Pudet, Pricing of american path-dependent contingent claims, *Mathematical Finance*, 6: 17 - 51 (1996)
- [4] S. Benninga and Z. Wiener, Dynamic hedging strategies, *Mathematica in education and research*, 7: 1-5 (1998).
- [5] Z. Boddie, A. Kane and A. Marcus, *Investments*. Fourth Ed. McGraw-Hill, Singapore (1999).
- [6] A. Brandt and C.W. Cryer, Multigrid algorithms for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems, *SIAM J. Sci Comput.*, 4: 655-684 (1983).
- [7] E. Briys, M. Bellalah, H.M. Mai and F. de Varenne *Options, futures and exotic derivatives: theory, application and practice*. John Wiley, West Sussex (1998).
- [8] N. Clarke and K. Parrot, *The multigrid solution of two factor american put options*. Res. Report 96-16, Oxford Comp. Lab, Oxford (1996).
- [9] N. Clarke and K. Parrot, Multigrid for american option pricing with stochastic volatility. *Appl. Math. Finance*, 6: 177-197 (1999).
- [10] C.W. Cryer, The solution of a quadratic programming problem using systematic overrelaxation, *SIAM J. Control*, 9: 385-392 (1971).
- [11] P. Forsyth, R. Zvan and K. Vetzal, *Discrete asian barrier options*. Arbeitspapier, Univ. Waterloo, Waterloo Canada (1998).  
<http://www.scicom.uwaterloo.ca/paforsyt/>

- [12] P. Forsyth, R. Zvan and K. Vetzal, Convergence of lattice and PDE methods for asian options. *Proceedings of the 9th Annual Derivatives Securities Conference*, Boston (1999).
- [13] P. Forsyth, *The Black-Scholes Equation*. Arbeitspapier, Univ. Waterloo, Waterloo Canada. <http://www.scicom.uwaterloo.ca/paforsyt/>
- [14] P. Forsyth, R. Zvan and K. Vetzal, *Diffusion operators and meshes in option pricing*. Arbeitspapier, Univ. Waterloo, Waterloo Canada (2000). <http://www.scicom.uwaterloo.ca/paforsyt/>
- [15] J. Frank, W. Hundsdorfer and J. Verwer, *Stability of implicit-explicit linear multistep methods*. Arbeitspapier, Amsterdam (1991).
- [16] C.W. Gear, *Numerical initial value problems for ordinary differential equations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ (1971).
- [17] E. Hairer and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations II, Stiff and differential-algebraic problems*. Second Ed. Springer, Berlin (1996).
- [18] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows*, 1, 2. John Wiley, Chichester (1990).
- [19] J. Huang and J.-S. Pang, Option pricing and linear complementarity, *J. Comput. Finance*, 2: 1-31 (1998).
- [20] J.C. Hull, *Options, futures and other derivatives*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ (1997).
- [21] W.H. Hundsdorfer *Numerical solution of Advection-Diffusion-Reaction Equations*. Amsterdam (1996).
- [22] W. Hundsdorfer, Partially implicit BDF2 blends for convection dominated flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38: 1763–1783 (2001).
- [23] M. Jungblut *WISO Aktien - Fonds - Futures, eine Einführung in die Börse*. Wirtschaftsverlag Ueberreuter, Wien (2000).
- [24] A. Klotz, Der Kick für das schnelle Geld, *Börse Online Special*, 2: 92 - 94 (2001).
- [25] B. van Leer, *Upwind-difference methods for aerodynamic problems governed by the Euler equation*. In: B. Enquist, S. Osher,

- R. Somerville (eds.), Large scale computations in fluid mechanics. Lectures in Appl. Math. 22 II, Americ. Math.Soc., Providence, R.I., 327-336 (1985).
- [26] A. Penaud, P. Wilmott and H. Ahn, *Exotic passport options*. Arbeitspapier, Math. Fin. Group, Oxford University, Oxford. <http://www.maths.ox.ac.uk/mfg/mfg/mfghome.htm>
- [27] L. Rogers and Z. Shi, The value of an asian option, *J. Appl. Probability*, 32: 1077 - 1088 (1995).
- [28] B. Schaeffer, *Millionen mit Optionen, Gezielter Vermögensaufbau mit Aktien- und Indexoptionen*. Finanz Buch Verlag, München (1998).
- [29] H. R. Schwarz, *Numerische Mathematik*. 4. Auflage. Teubner, Stuttgart (1997).
- [30] R. Seydel, *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten*. Springer, Berlin Heidelberg New York (2000).
- [31] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1*. 7. Auflage. Springer, Berlin Heidelberg New York (1994).
- [32] J. Stoer und R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 2*. 3. Auflage. Springer, Berlin Heidelberg New York (1990).
- [33] U. Trottenberg, C.W. Oosterlee and A. Schüller, *Multigrid*. Academic Press, London (2001).
- [34] J. Verwer, W. Hundsdorfer and J. Blom, *Numerical time integration for air pollution models, Modelling, analysis and simulation*. Amsterdam (1998).
- [35] P. Wilmott, J. Dewynne and S. Howison, *Option pricing*. Oxford Financial Press (1993).
- [36] P. Wilmott, S. Howison and J. Dewynne, *The Mathematics of financial derivatives*. Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [37] Z. Zhu and N. Stokes, *A finite element platform for pricing path-dependent exotic options*. Clayton (1999).

- [38] R. Zvan, K. Vetzal and P. Forsyth, *PDE methods for pricing barrier options*. Arbeitspapier, Univ. Waterloo, Waterloo Canada (1997).
- [39] R. Zvan, P.A. Forsyth and K.R. Vetzal, Robust numerical methods for PDE models of asian options. *J. Comput. Finance*, 1: 39-78 (1998).

## **Erklärung**

Hiermit versichere ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Neuwied, den