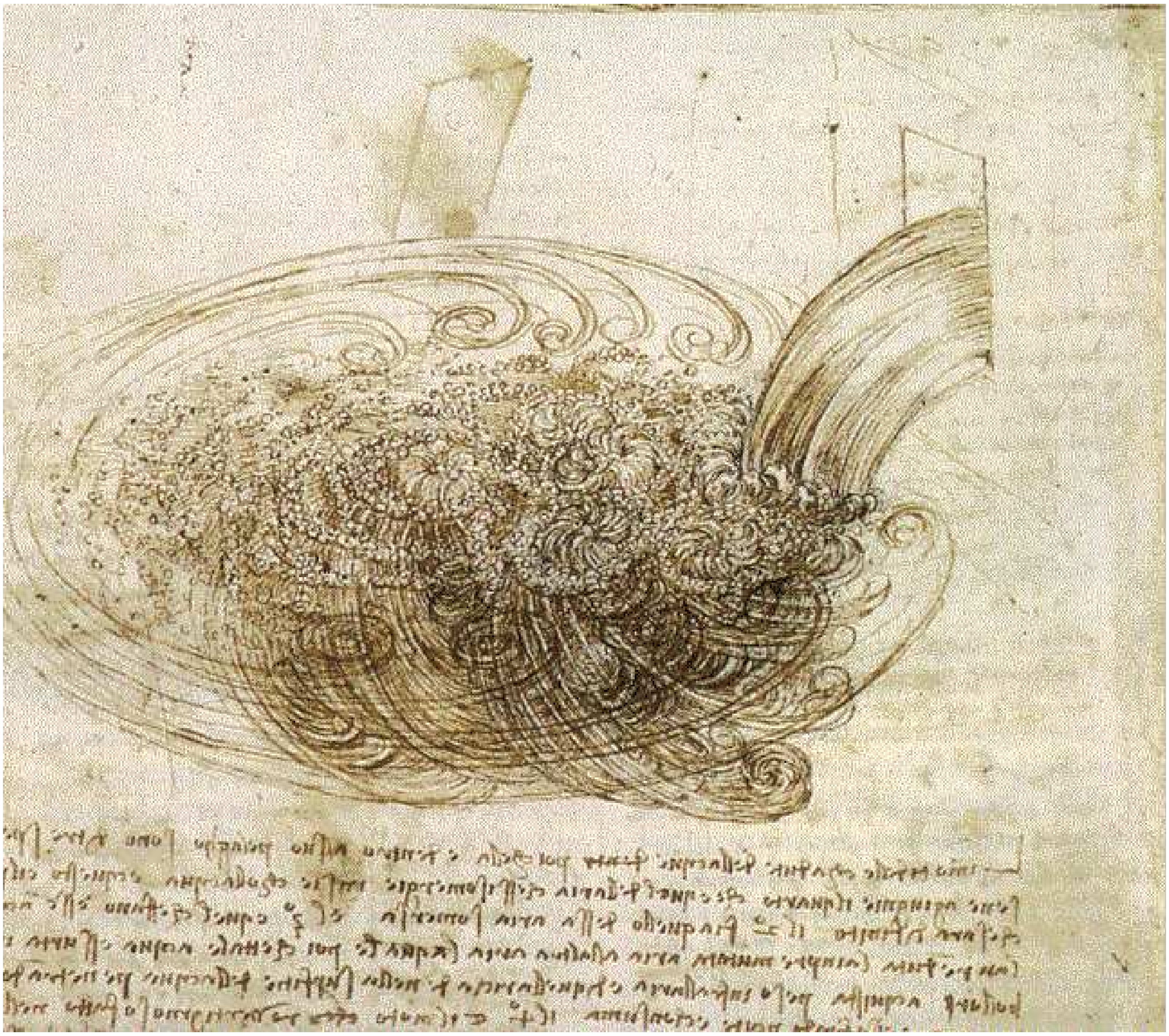
Turbulenz: Modellierung komplexer Strömungsphänomene

C.W. Oosterlee



(Leonardo da Vinci ~ 1508)

Laminar versus Turbulent

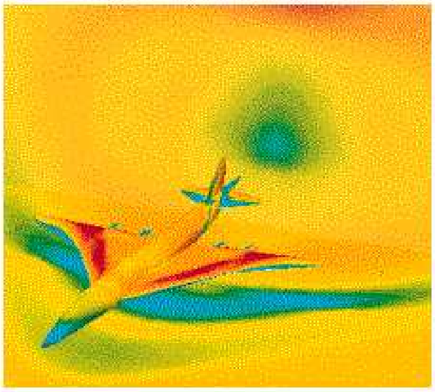
Laminare Strömungen

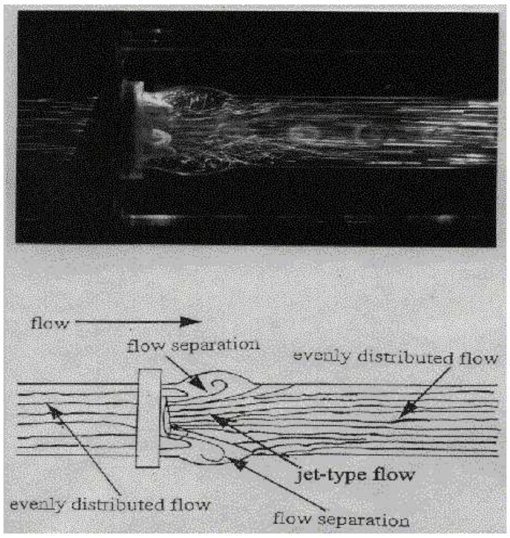
- verlaufen geordnet, sind regelmäßig und glatt
- können 1D, 2D, 3D und stationär sein
- sind eine Ausnahme !

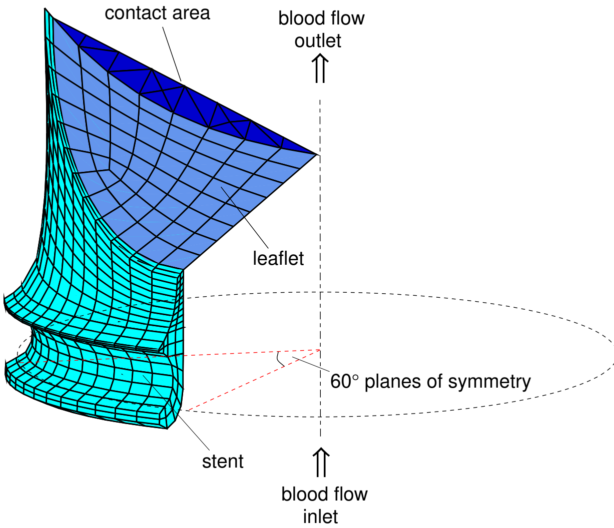
Turbulente Strömungen sind

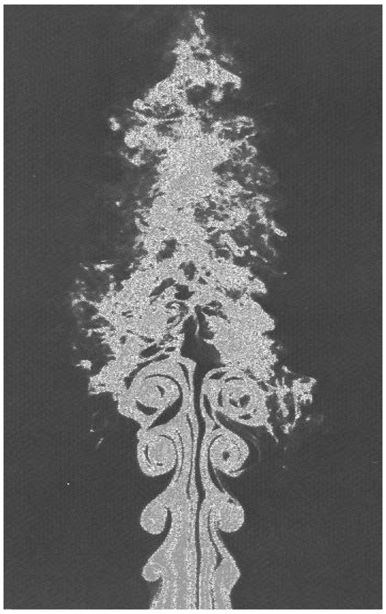
- drehbehaftet: bestehen aus Wirbelelementen verschiedenster Größe
- unregelmäßig: komplizierte Variationen der Geschwindigkeit, Temperatur usw.
- instationär und 3D
- mischungsintensiv
- dissipativ: an den kleinsten Elementen wirken viskose Kräfte, die die kinetische Energie in Wärme überführen

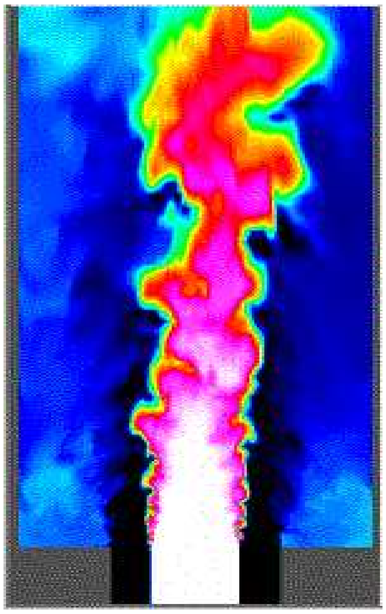
Turbulente Strömungen











Notwendigkeit von Berechnungsverfahren

- Zur Optimierung ihrer Entwürfe müssen Ingenieure das Verhalten von Strömungen vorhersagen können
- Messungen am wirklichen Objekt sind meist unmöglich oder sehr teuer
- Modellversuche sind teuer und zeitraubend, manche Strömungsvorgänge lassen sich nicht im Labor simulieren

$\Rightarrow$ Rechnungen sind für manche Strömungen die einzige Vorhersagemöglichkeit, für andere Strömungen schneller und billiger als Experimente

Die mathematischen Gleichungen

- Strömungsvorgänge werden für laminare ***und turbulente*** Strömungen durch die Navier-Stokes Gleichungen beschrieben.

x-Impuls:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$Re = \overline{U}L/\nu$ (Reynoldszahl)

(Ähnlich für y- und z-Impuls)

(Navier 1785-1835, Stokes 1819-1903)

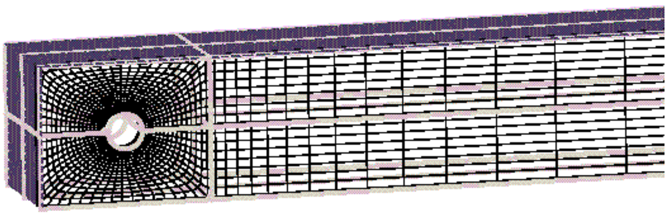
Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Fluid:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- $\boxed{Re < Re_{tr}\text{: laminar,} \qquad Re > Re_{tr}\text{: turbulent}}$

- System nicht-linearer partieller Differentialgleichungen, Lösung i.a. nur mit Hilfe numerischer Verfahren möglich
- Es gibt numerische Verfahren, mit denen man die Gleichungen im Prinzip lösen kann

  $\Rightarrow$ Direkte Numerische Simulation (DNS)



Die Reynoldszahl

$$\Longrightarrow \; Re = \overline{U} L / \nu$$

- Umrühren von Kaffee $\qquad Re \sim 10^4$
- Luftströmung um ein Auto ($50 km/h$) $\qquad Re \sim 3 \cdot 10^6$
- Wasserströmung eines Flußes (Elbe) $\qquad Re \sim 10^7$
- Luftströmung um ein Flugzeug $\qquad Re \sim 3 \cdot 10^8$

Frage der exakten Berechnung

DNS hat zwei Probleme

1. Turbulenz ist deterministisches Chaos
   $\Rightarrow$ das numerische Problem ist nicht korrekt gestellt
   ("Ill-posed"): Rundungsfehler, Approximationsfehler usw. liefern unterschiedliche Strömungsverhalten

- Das numerische Experiment ist wie ein reales Experiment,
  $\Rightarrow$ die Ergebnisse genauso auswerten:
  mehrere Experimente durchführen,
  Mittelwerte der Strömungsgrößen bilden
- Alle Größen sind für alle Zeitschritte im gesamten Rechenbereich bekannt.

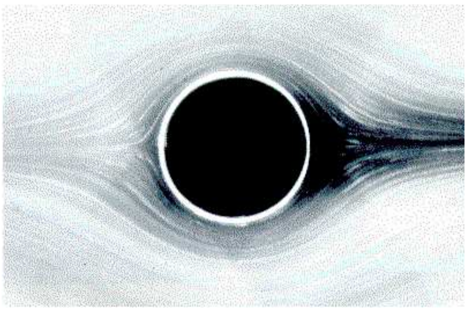
2. Bei turbulenten Strömungen spielen die sehr kleinen Wirbelelemente eine wichtige Rolle.
   Das Rechengitter muss sie erfassen.

- Makrostruktur mit Längenskala $\mathcal{L}$,
  Mikrostruktur mit der Kolmogorov Längenskala η
- Anzahl der Gitterpunkte: $\left(\frac{\mathcal{L}}{\eta}\right)^3$

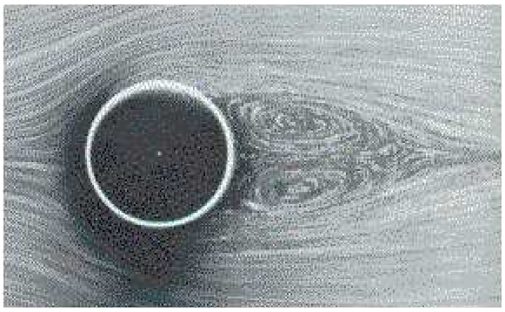
DNS, ein Beispiel

- Kanalströmung mit $Re = \overline{U} \cdot \mathcal{L}/\nu = 10^5$
- $\eta \approx \mathcal{L}/1000$
- Auflösung der kleinsten Turbulenzbewegungen:
  1000 Gitterpunkte in jeder Raumrichtung: 10^9 Punkte
- Erforderliche Speicherkapazität: $> 10 \times 10^9$
- Anzahl der Rechenoperationen pro Punkt und Zeitschritt: ~ 500
- Anzahl der Zeitschritte: ~ 10000
  $\Rightarrow$ Anzahl der Rechenoperationen 5×10^{15}

- Für praktische Anwendungen ist DNS nicht verwendbar
- Durch die zunehmende Leistungsfähigkeit der Superrechner werden zunehmend hohe Reynoldszahlen betrachtet
- Erforschung der grundlegenden Mechanismen der Turbulenz

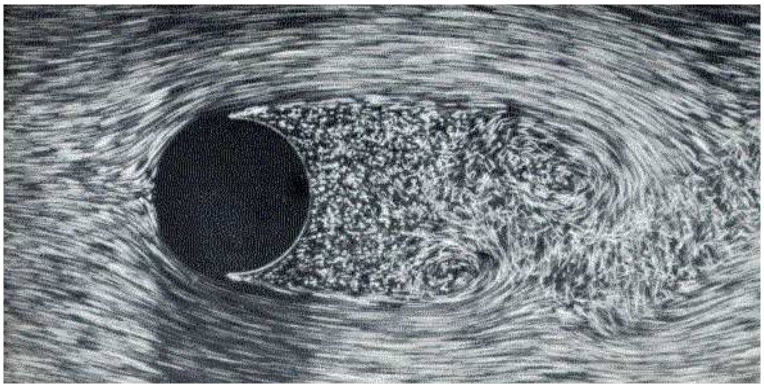


$Re = 0.16$,
Laminar, stationär,
symmetrisch

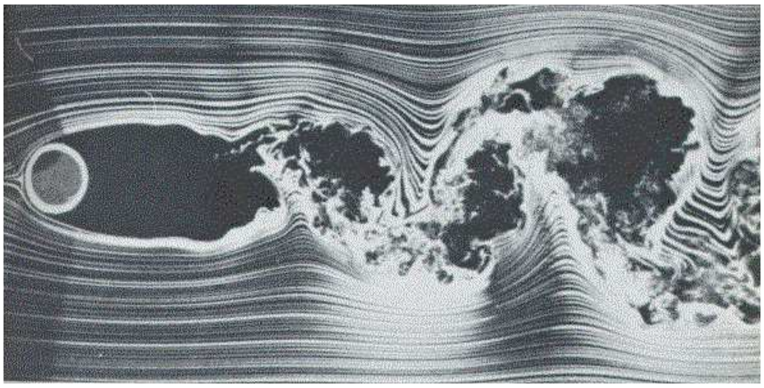


$Re = 26$,
Laminar, stationär,
Recirculation

$Re = 140$,
Transition, instationär,
von Kármán Wirbelstraße



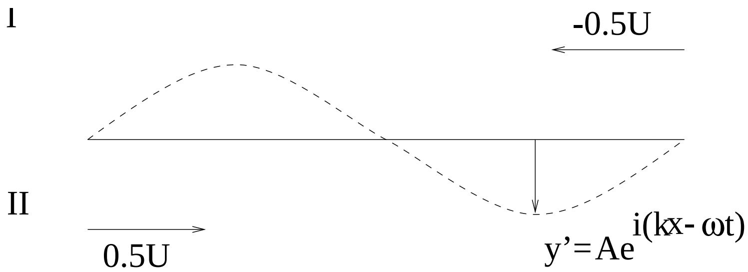
$Re = 2000$,
Turbulent, instationär



$Re = 10000$,
Turbulent, instationär

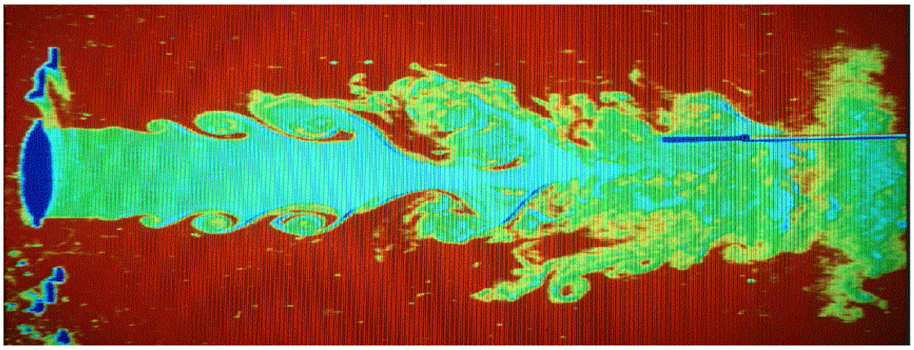
Die Kelvin-Helmholtz Instabilität

Stabilitätsanalyse



- $-\infty < x < \infty$, $\quad k = 2\pi/\lambda \in I\!R^+$: Wellenzahl
- $\omega = \omega_r + i\omega_i$, $\quad \omega_r = 2\pi/T$
- Annahme: die Strömung ist reibungsfrei und rotationsfrei (Potentialströmung)
- $\omega_i > 0$: die Amplitude wächst exponentiell $\rightarrow$ instabile Strömung
- Man findet tatsächlich: $\omega_1 = \frac{1}{2} iUk$

$\Rightarrow$ die Strömung ist instabil für jede Störung



Weg zum Chaos

Bifurkationsanalyse

- Beispiel: das Lorenz Modell (1963), ein einfaches Modell für die Rayleigh-Bénard Instabilität
  - Ein System 3 zeitabhängiger nicht-linearer deterministischer Gleichungen kann ein zeitlich irreguläres Verhalten haben

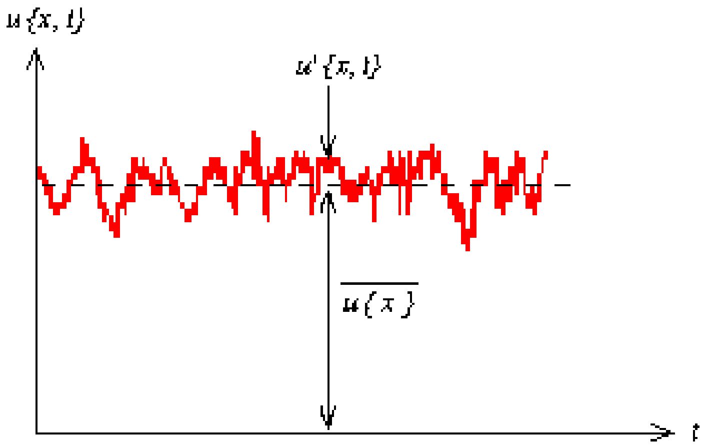
Turbulenz-Mechanismus:

- Die am schnellsten wachsenden Störungen formen die größten Wirbel. Diese sind instabil, zerbrechen in kleinere Wirbeln usw. und werden kontinuierlich ersetzt
- Die Generierung und Zerstörung der Wirbel (Kaskade Prozeß) ist ein Mechanismus, der die Energie der mittleren Strömung über die viskose Dissipation in den kleinsten Wirbeln in Wärme umzusetzt

Die drei Modelle

- Direkte Numerische Simulation
- Gemittelte Navier-Stokes Gleichungen (Reynoldsgleichungen)
- "Large Eddy Simulation" (Groß-Wirbel-Simulation)

Statistische Betrachtungsweise



- $u(x,t) \equiv \overline{u} + u' \qquad p = \overline{p} + p'$, usw.
- $\overline{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(x,t')dt'$ (Stationärer Prozeß) oder $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \Sigma_{\alpha=1}^{N} u(x,t)^{(\alpha)}$
- $\overline{u'} = 0$
- Gemittelte Gleichungen (Reynoldsgleichungen), z.B. für x-Impuls:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} =$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \overline{u'u'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\right)$$

(Ähnlich für y- und z-Impuls)

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0$$

Schließungsproblem

- Schließung ist nur durch Einbringen empirischer Information möglich

$$-(\overline{u'u'} + \overline{u'v'} + \overline{u'w'}) = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)$$

- Modellierung $\mu_t = \rho v_t \ell$ ist eine Wirbelviskosität
- Z.B. über die Prandtlsche Mischungswegtheorie (Aerodynamik)
- Oder über das $k - \varepsilon$ Turbulenzmodell (Hydrodynamik)

$$v_t \sim \sqrt{k}, \quad \ell \sim k^{3/2}/\varepsilon \quad (k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'})$$

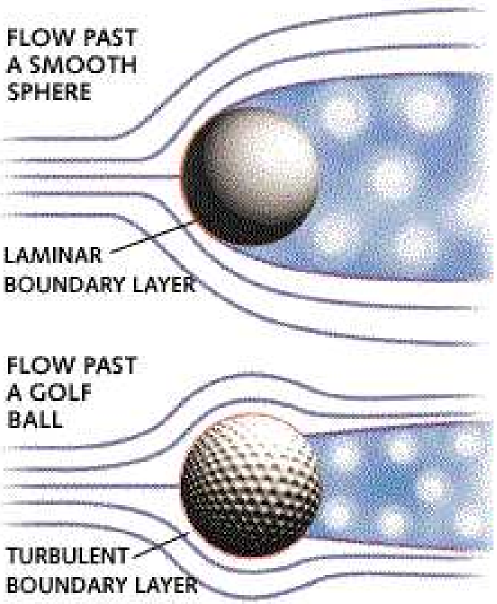
  Modell mit 2 zusätzlichen Transportgleichungen für k und ε

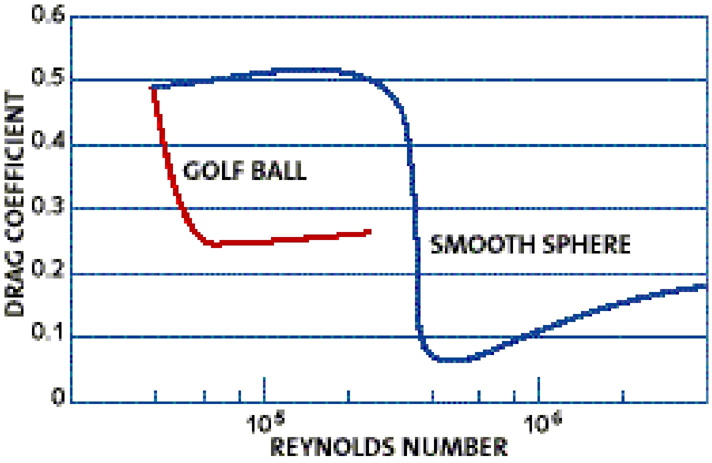
- Viele Varianten mit empirischen Konstanten, ad hoc Änderungsmöglichkeiten
- Täglicher Einsatz bei Ingenieuren
- Kompromiß zwischen Genauigkeit und Realisierbarkeit der Rechnungen

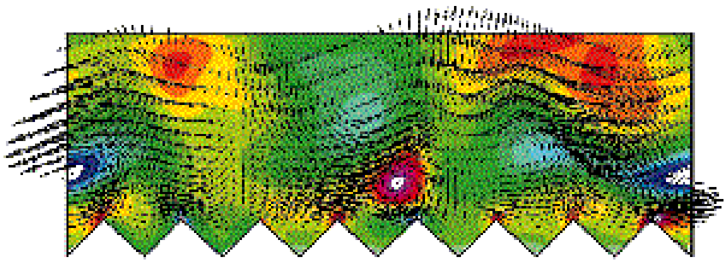
“Large Eddy Simulation” (LES)
(Groß-Wirbel-Simulation)

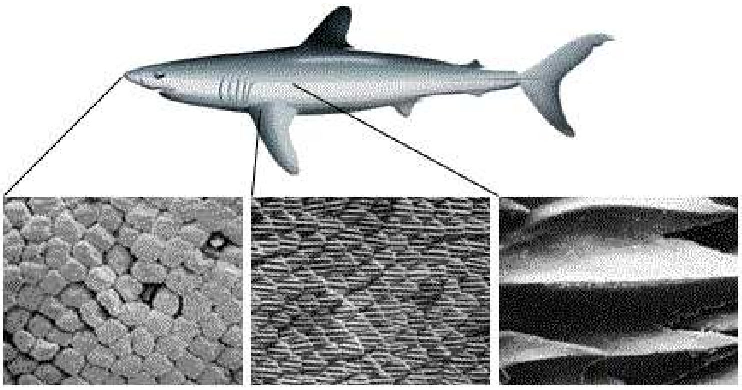
- Unterschiedliche Behandlung der Makro- und Mikrostruktur der Turbulenz
- Makrostruktur ist problem-abhängig (wird gerechnet mit DNS)
- Man rechnet 3D, zeitabhängig auf einem feinen Gitter, braucht aber die kleinsten Wirbel nicht zu erfassen
- Man filtert die kleinen Wirbel heraus und modelliert sie z.B. mit Ansätzen aus der statistischen Turbulenz-Betrachtung
- Mikrostruktur ist universell (?) “Isotrope Turbulenz” und wird wie in den Reynoldsgleichungen modelliert mit einer Schließung
- Erfolgreich in atmosphärischen konvektiven Grenzschicht-Rechnungen
- LES ist ein vielversprechender Ansatz mit ersten Anwendungen in der Industrie

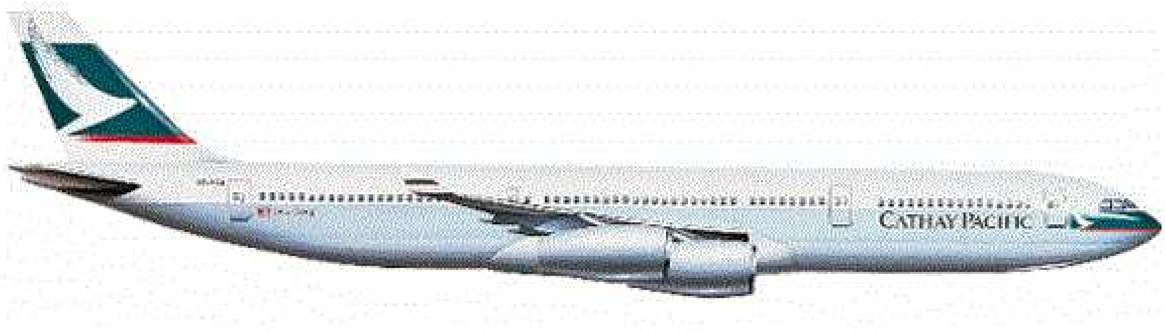
Dellen und Rillen

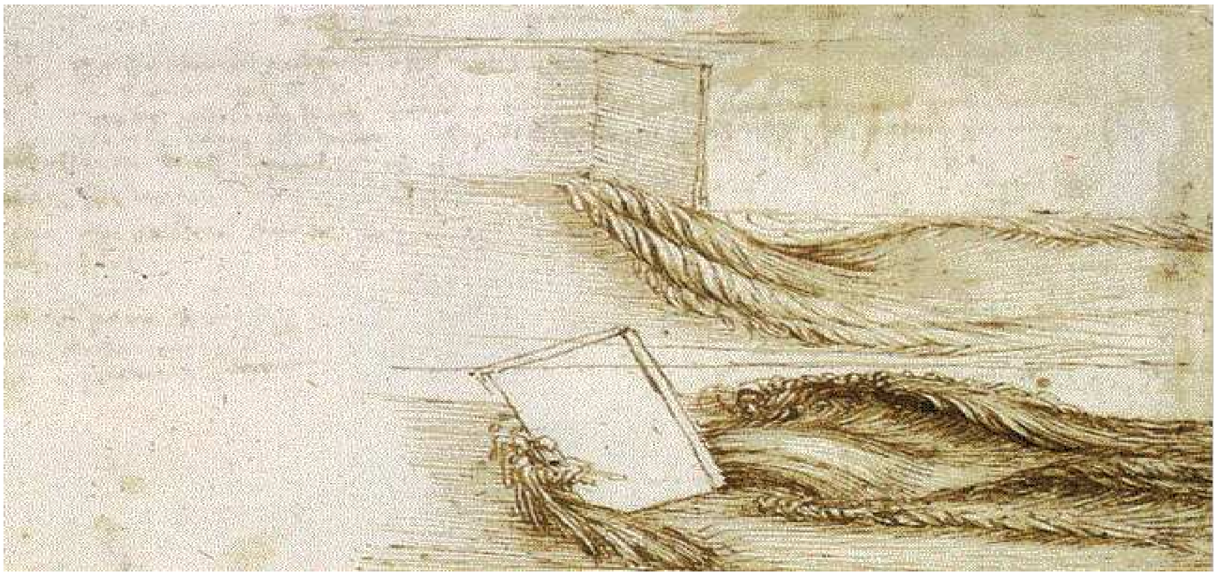




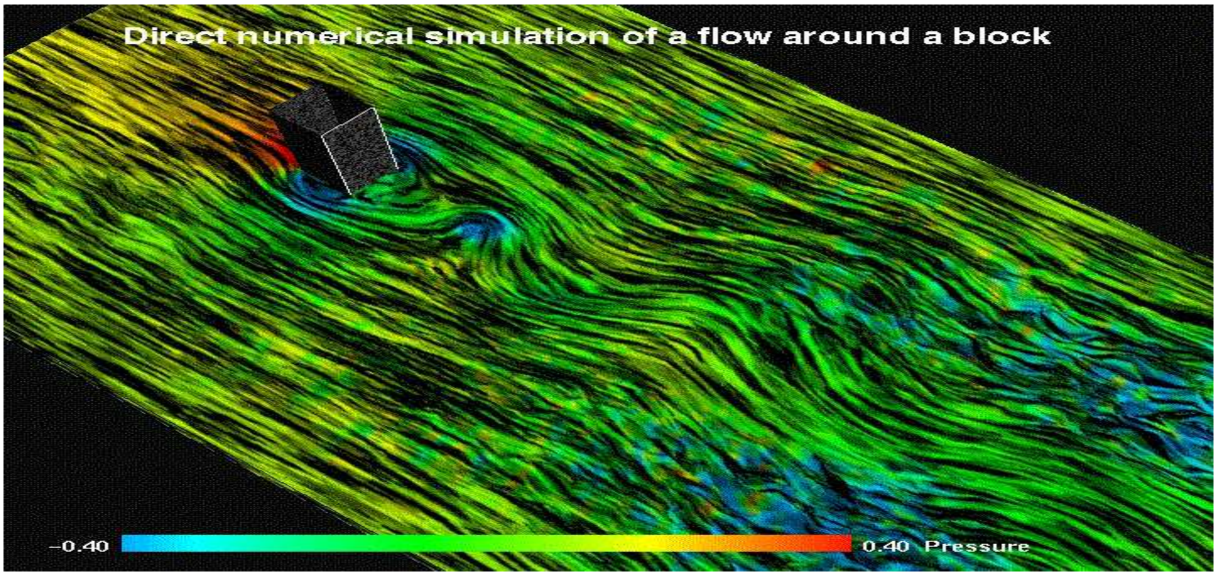








Leonardo



DNS

$Re = 22000$

(Univ. Groningen, NL)