Technische Universiteit Delft
Faculteit Informatietechnologie en Systemen

Uitwerkingen toets wi2091: Numerieke methoden voor differentiaalvergelijkingen
maandag 25 maart 2002, 14:00-15:30

1. (a) Kies $f(x) \equiv 1$ dan geldt $f'''(\xi) = 0$, dus $f(x) = p(x) \equiv 1$. Omdat

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2),$$

geldt:

$$p(x) = L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) = f(x) = 1,$$

waarmee het gevraagde bewezen is.

(b) $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$, $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$ en $r(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}$.

(c) Invullen van de gegevens levert:

$$|\hat{p}(x) - p(x)| = |L_0(x)\epsilon_0 + L_1(x)\epsilon_1 + L_2(x)\epsilon_2| \leq (|L_0(x)| + |L_1(x)| + |L_2(x)|)\epsilon.$$

Gebruik nu dat $x = x_0 + \alpha h$ met $\alpha \in [0, 2]$. Dan geldt

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq (\frac{|(\alpha-1)(\alpha-2)|}{2} + |\alpha(\alpha-2)| + \frac{|\alpha(\alpha-1)|}{2})\epsilon.$$

Voor $\alpha \in [0, 1]$ geldt:

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq (-\alpha^2 + \alpha + 1)\epsilon.$$

Het maximum wordt aangenomen voor $\alpha = \frac{1}{2}$ en is gelijk aan

$$|\hat{p}(x) - p(x)| \leq 1.25\epsilon.$$

Voor $\alpha \in [1, 2]$ gaat het bewijs analoog.

(d) **Afbreekfout**

Merk op dat $f'''(x) = e^x$. Omdat $\xi \leq 0$ geldt $|f'''(\xi)| \leq 1$. Verder is $x_0 = 0$, $x_1 = -0.1$, $x_2 = -0.2$ en $x = -0.05$. Dit invullen geeft dat de afbreekfout kleiner is dan $6.25 \cdot 10^{-5}$.

Afrondfout
De afrondfout van de getallen in de tabel is hoogstens 0.00005. Dus $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ zodat de afrondfout in de interpolatie kleiner is dan $6.25 \cdot 10^{-5}$.
Omdat de afbreekfout en afrondfout van dezelfde orde van grootte zijn heeft het niet veel zin om de getallen met meer cijfers te bepalen.

2. (a) EV: $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$ is expliciet.
EA: $u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$ is impliciet.

(b) Gebruik de testvergelijking $y' = \lambda y$, waarbij $f(t, y) = \lambda y$. Invullen geeft:
EV: $u_{n+1} = u_n + h\lambda u_n$ dus $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda$.
EA: $u_{n+1} = u_n + h\lambda u_{n+1}$ dus $Q(h\lambda) = 1/(1 - h\lambda)$.

(c) De exacte oplossing voor de testvergelijking is:
$y_{n+1} = e^{h\lambda} y_n = (1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + ...)y_n$
EV: $\bar{u}_{n+1} = Q(h\lambda)y_n = (1 + h\lambda)y_n$.
EA: $\bar{u}_{n+1} = Q(h\lambda)y_n = 1/(1 - h\lambda)y_n = (1 + h\lambda + (h\lambda)^2 + ...)y_n$

Dit invullen in de formule van de afbreekfout

$$\tau = \frac{y_{n+1} - \bar{u}_{n+1}}{h},$$

geeft dat de afbreekfout voor beide methoden $O(h)$ is.

(d) EV: $|Q(h\lambda)| \leq 1$ geeft $h \leq \frac{2}{-\lambda}$.
EA: $|Q(h\lambda)| \leq 1$ hier is aan voldaan voor alle h.

(e) Neem $x_1 = y$ en $x_2 = y'$. Het stelsel is dan:

$$x_1' = x_2 \text{ en } x_2' = -99x_1 - 100x_2 + t$$

(f) Wat betreft werk per tijdstap en de afbreekfout is er geen echt onderscheid voor beide methoden. EV is expliciet, dit is gewoonlijk een voordeel echter voor een lineair stelsel is een impliciete methode geen groot nadeel. Als laatste bekijken we de stabiliteit. De eigenwaarden van de matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -99 & -100 \end{pmatrix},$$

zijn $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -99$ (stijf stelsel). Dat betekent dat bij EV voldaan moet zijn aan de ongelijkheid $h \leq 2/99$, zodat er veel tijdstappen nodig zijn. De EA methode echter kan stabiel gebruikt worden voor elke tijdstap. Samenvattend: kies EA voor dit probleem.