

1. (a) De methode is impliciet, omdat u_{n+1} ook in het rechterlid voorkomt.
- (b) Voor het afleiden van de versterkingsfactor gebruiken we altijd de testvergelijking $y' = \lambda y$. Merk op dat $f(t, y) = \lambda y$. Als we dit invullen in de methode dan geldt:

$$u_{n+1} = u_n + h\left[\frac{3}{4}\lambda u_n + \frac{1}{4}\lambda u_{n+1}\right].$$

Als we dit vereenvoudigen dan geldt

$$u_{n+1} = \frac{1 + \frac{3}{4}h\lambda}{1 - \frac{1}{4}h\lambda}u_n.$$

Hieruit volgt: $k(h\lambda) = \frac{1 + \frac{3}{4}h\lambda}{1 - \frac{1}{4}h\lambda}$.

2. In deze opgave is $\lambda = -4$. De numerieke methode is stabiel als $|k(h\lambda)| \leq 1$. Dit geeft

$$\left|\frac{1 + \frac{3}{4}h\lambda}{1 - \frac{1}{4}h\lambda}\right| = \left|\frac{1 - 3h}{1 + h}\right| \leq 1.$$

Omdat h positief is volgt hieruit

$$-1 - h \leq 1 - 3h \leq 1 + h.$$

Aan de rechter ongelijkheid is altijd voldaan. Uit de linker ongelijkheid volgt $-1 - h \leq 1 - 3h$, dus $2h \leq 2$, zodat de methode stabiel is als $h \leq 1$.

3. In dit geval kunnen we gebruik maken van het feit dat $u_1 = k(h\lambda)u_0$. Invullen van alle gegevens geeft

$$u_1 = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{6}{10} = 0.6$$