1. Neem de functie $f(x) = 1, \ \ x \in [x_0, x_n]$. Dan geldt $f(x) - P_n(x) = 0$, zie Stelling 3.3 en dus geldt: $L_n(x) = f(x) = 1, \ \ x \in [x_0, x_n]$.

2. $\sin(37^o) = 0.60181502$ en $p(37^o) = 0.60181712$.

3. Pas het bewijs van Stelling 2.2.1 aan voor het tweede graads polynoom.

4. Let op dat sin'(α) $\neq$ cos (α), als α gemeten wordt in graden. Om de afgeleide te bepalen gebruiken we de volgende definities: de sinus en cosinus functie in graden geven we aan met SIN en COS, terwijl de sinus en cosinus functie in radialen aangeven worden met sin en cos. Hiermee kunnen we afleiden dat:

$$\frac{dSIN(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\sin(\frac{2\pi}{360^o}\alpha)\right) = \cos(\frac{2\pi}{360^o}\alpha)\frac{2\pi}{360^o} = \frac{2\pi}{360^o}COS(\alpha)$$

   Hermite interpolatie geeft

$$H_{1,0}(37^o) = \frac{1}{2} \text{ en } H_{1,1}(37^o) = \frac{1}{2}$$

$$\hat{H}_{1,0}(37^o) = \frac{1}{4} \text{ en } \hat{H}_{1,1}(37^o) = -\frac{1}{4}$$

   Dit geeft als antwoord: 0.60181502. Dit is het exacte antwoord.

5. **(i)** De kubische spline s van de functie $f(x) = x$ is een interpolerende spline van graad 3 met de steunpunten $x_0 = 0, x_1 = 1$ en $x_2 = 2$. Het gevolg is dat s een derde graads polynoom is op de intervallen $[0,1]$ en $[1,2]$, waarbij in het knooppunt $x = 1$ er aansluitvoorwaarden gelden. In deze vraagstelling willen we $s(\frac{1}{2})$ bepalen. Merk op dat het genoeg is om dan de spline $s_0(x)$ te bepalen. Als in paragraaf 2.5 uit het dictaat wordt afgeleid is het voldoende om de vergelijking

$$2(h_0 + h_1)G_1 = 6\left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right) \tag{1}$$

   voor G_1 op te lossen. Zoals ook in deze paragraaf wordt afgeleid zijn $G_0 = G_2 = 0$. Met het gegeven dat $h_i = x_{i+1} - x_i$ en $f_i = f(x_i)$ volgt dat

$$2(1+1)G_1 = 6\left(\frac{2-1}{1} - \frac{1-0}{1}\right),$$

   en dus dat $G_1 = 0$.
   Omdat $G_0 = 2b_0$ volgt ook dat $b_0 = 0$. Met de formule

$$a_0 = \frac{1}{6h_0}(G_1 - G_0)$$

volgt dat $a_0 = 0$. Voor c_0 volgt met

$$c_0 = \frac{f_1 - f_0}{h_0} - h_0 \frac{2G_0 + G_1}{6}$$

dat $c_0 = 1$. En met $d_j = f_j$ volgt $d_0 = 0$. De spline $s_0(x)$ op het interval $[0, 1]$ is dan

$$s_0(x) = a_0(x - x_0)^3 + b_0(x - x_0)^2 + c_0(x - x_0) + d_0 = x.$$

We zien dus dat de spline s in $x = \frac{1}{2}$ exact is; $s(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

(ii) In het geval dat de functie f gelijk is aan $f(x) = x^2$, moeten we de vergelijking

$$2(h_0 + h_1)G_1 = 6\left(\frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0}\right)$$

oplossen. Er volgt na invullen van de bekenden

$$4G_1 = 12,$$

dus $G_1 = 3$. Uit de theorie volgt dat $G_0 = G_2 = 0$ en dus dat $b_0 = \frac{1}{2}G_0 = 0$. Tevens

$$a_0 = \frac{1}{6h_0}(G_1 - G_0) = \frac{1}{6}(3 - 0) = \frac{1}{2}.$$

De coefficient c_0 is gelijk aan

$$c_0 = \frac{f_1 - f_0}{h_0} - h_0 \frac{2G_0 + G_1}{6} = \frac{1}{2}.$$

We weten ook dat $d_0 = f_0 = 0$. De spline $s_0(x)$ op het interval $[0, 1]$ wordt dan

$$s_0(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x.$$

Er volgt :

$$s_0(\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}.$$

De kubische spline is dus niet exact voor de functie $f(x) = x^2$; $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

6. Om de ongelijkheid te bewijzen maken we gebruik van de opmerking: $f = s + (f - s)$. We gaan eerst het integratieinterval splitsen in deelintervallen:

$$\int_{x_0}^{x_n} (f'(x))^2 dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (f'(x))^2 dx$$

Invullen van de hint geeft:

$$\int_{x_0}^{x_n} (f'(x))^2 dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (s'(x))^2 dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} (f'(x) - s'(x))^2 dx + 2\int_{x_j}^{x_{j+1}} s'(x)(f'(x) - s'(x)) dx$$

Omdat de tweede term in het rechterlid altijd positief is geldt:

$$\int_{x_0}^{x_n} (f'(x))^2 dx \geq \int_{x_0}^{x_n} (s'(x))^2 dx + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} s'(x)(f'(x) - s'(x)) dx \tag{2}$$

Voor de laatste term gebruiken we partiele integratie:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} s'(x)(f'(x) - s'(x)) dx = s'(x)(f(x) - s(x))_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} s''(x)(f(x) - s(x)) dx$$

Omdat $f(x_j) = s(x_j) = y_j$ is de eerste term aan de rechterkant gelijk aan 0, terwijl $s''(x) = 0$ omdat s een eerste graadsfunctie is op elk interval, zodat ook de tweede term aan de rechterkant gelijk is aan 0. Dit gecombineerd met ongelijkheid (2) geeft dat:

$$\int_{x_0}^{x_n} (f'(x))^2 dx \geq \int_{x_0}^{x_n} (s'(x))^2 dx$$

hetgeen bewezen moest worden.

Interpretatie: de lineaire spline s is de functie die door y_i gaat en waarvoor

$$\int_{x_1}^{x_n} (s'(x))^2 dx$$

minimaal is.