

**Oefenopgaven Serie 5 (cursus 2004/2005)**  
**wi2604: Numerieke methoden I**<sup>1</sup>

**Behandelde begrippen**

- lokale afbreekfout, consistentie
- stabiliteit differentiaalvergelijking, numerieke stabiliteit
- convergentie, globale afbreekfout, efficiency

**Opgaven**

1. Gegeven is de volgende numerieke integratiemethode voor het oplossen van  $y' = f(t, y)$ :

$$w^* = w_n + \beta h f(t_n, w_n)$$
$$w_{n+1} = w^* + (1 - \beta) h f(t_n + \beta h, w^*)$$

- (a) Laat zien, dat de lokale afbreekfout  $O(h)$  is voor elke waarde van  $\beta$  (en dus niet  $O(h^2)$ ).
- (b) Bepaal de versterkingsfactor van deze methode.
- (c) Beschouw de niet-lineaire differentiaalvergelijking:

$$y' = 2y - 4y^2.$$

Bepaal de maximale stapgrootte zodanig, dat de methode (met  $\beta = \frac{1}{2}$ ) stabiel is in de buurt van  $\hat{y} = \frac{1}{2}$ .

2. Laat zien dat de Trapeziumregel stabiel is voor alle  $h > 0$ , als  $\lambda \leq 0$ . Schat de orde van de lokale afbreekfout voor de testvergelijking. (Hint:  $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+\dots, |z| < 1$ )
3. Gegeven is het niet-lineaire beginwaardeprobleem:  $y' = 1 + (t - y)^2$ . Geef de stabiliteitsvoorwaarde voor de Modified Euler methode in het punt  $\hat{t} = 2$  en  $\hat{y} = 1$ .
4. Stel we willen de oplossing bepalen van de vergelijking

$$y' = -y + \sin(\alpha t) + \alpha \cos(\alpha t), \text{ en } y(0) = 0.$$

Gegeven is de exacte oplossing:  $y(t) = \sin(\alpha t)$ . Gewenst is dat de lokale afbreekfout kleiner is dan 0.01. Je mag aannemen dat  $|\tau_{j+1}(h)| \leq \frac{h}{2} y''(\xi)$  voor beide methoden. Stel  $\alpha = 10$ , aan welke methode geeft u de voorkeur: de achterwaartse of de voorwaartse methode van Euler (+ motivatie)? Beantwoord dezelfde vraag voor  $\alpha = 0.05$ .

---

<sup>1</sup>voor de antwoorden zie: <http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi211/answer5.pdf>