TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 18 april 2013, 18:30-21:30

1. We beschouwen de numerieke integratie van het volgende beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ met de voorwaartse methode van Euler

$$w_{n+1} = w_n + hf(t_n, w_n). \tag{1}$$

a Bepaal de orde van de locale afbreekfout. (2.5pt.)

b We beschouwen het volgende tweede orde beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} y'' + \varepsilon y' + y = sin(t), \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Herschrijf dit beginwaardeprobleem in de vorm van een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen. Neem ook de beginvoorwaarden mee. (1pt.)

We gaan verder met het volgende stelsel beginwaardeproblemen

$$\begin{cases} y_1' = -y_2, \\ y_2' = y_1 + \varepsilon y_2, \end{cases} \tag{3}$$

met beginvoorwaarden $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 2$ en $\varepsilon \in \mathbb{R}$ een gegeven constante.

c Wat is de maximaal toelaatbare waarde van h voor numerieke stabiliteit als $\varepsilon = 0$? Geef een gedegen toelichting. (2.5pt.)

d Voor welke waarden van ε is het gegeven stelsel (analytisch) stabiel? (2pt.)

e Wat is de maximaal toelaatbare waarde van h voor numerieke stabiliteit indien $-2 \leq \varepsilon < 0$? Licht het antwoord toe. (2pt.)

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = x^2 + 2x - 2, & x \in (0,1), \\ y(0) = 0, \qquad y'(1) = 2. \end{cases} \tag{4}$$

a Toon aan dat $y(x) = x^2$ aan dit randwaardeprobleem voldoet. (1pt.)

We gebruiken een eindige differentiemethode om de oplossing van bovenstaand randwaardeprobleem te benaderen. Laat de gridpunten gegeven worden door $x_j = jh$, met h als stapgrootte. Laat $x_n = nh = 1$.

b Geef een eindige differentieschema (+ motivatie) waarvan de locale afbreekfout van $O(h^2)$ is. *Hint:* Gebruik een virtueel roosterpunt voor de randvoorwaarde op $x = 1$. (3pt.)

c Beredeneer, gebruikmakend van de schatting van de afbreekfout in vorig onderdeel en de exacte oplossing van dit randwaardeprobleem, dat het verschil tussen de numerieke benadering van de oplossing en de exacte oplossing gelijk is aan nul. (2pt.)

Gegeven zijn de volgende tabelwaarden voor de benadering van de functie $y(x) = x^2$.

Tabel 1: Functiewaarden voor $\tilde{y}(x)$ (afgerond op drie decimalen).

x	$\tilde{y}(x)$
0	0
0.25	0.063
0.5	0.25

d Schat $y'(0)$ met behulp van voorwaartse differenties gebruikmakend van de waarden uit Tabel 1 met $h = 0.25$ en $h = 0.5$. (1pt.)

e We bekijken de nauwkeurigheid van de berekening.

   i Stel dat de tabelwaarden een (afrond)fout van maximale grootte $\varepsilon = 0.0005$ bevatten, zeg $|\tilde{y}(x_j) - y(x_j)| \leq \varepsilon$ ($y(0) = 0$ is exact), wat is de invloed van deze afrondfout op de fout van de voorwaartse differenties? (1pt.)

   ii Toon aan dat de afbreekfout van $O(h)$ is. (1pt.)

   iii Gebruik de methode van Richardson om de fout te schatten. (1pt.)