TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 4 juli 2013, 18:30-21:30

1. We gebruiken Euler Voorwaarts om het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ numeriek te integreren.

   [a] Laat zien dat de locale afbreekfout van Euler Voorwaarts $O(h)$ is. *Het is niet toegestaan om de testvergelijking te gebruiken.* (2pt)

   [b] Leid de versterkingsfactor van Euler Voorwaarts af. (2pt)

   Gegeven het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = \sin t, \\ y(0) = -1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   [c] Laat zien dat $y(t) = -cos(t)$ de oplossing is van bovenstaand beginwaardeprobleem. (1pt)

   [d] Herschrijf dit beginwaardeprobleem in de vorm van een stelsel van eerste orde differentiaalvergelijkingen. Behandel de beginvoorwaarden ook. (1pt)

   We gaan verder met het volgende stelsel beginwaardeproblemen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

   [e] Voer één stap uit met Euler Voorwaarts met $h = 0.5$ en $t_0 = 0$ op het bovenstaande stelsel met beginvoorwaarden $x_1(0) = -1$ en $x_2(0) = 0$. (2pt)

   [f] Bepaal het interval voor de tijdsstap h waarin Euler Voorwaarts toegepast op stelsel (2) stabiel is. (2pt)

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We onderzoeken Lagrange interpolatie. Voor gegeven steunpunten x_0, x_1 …, x_n met bijbehorende functiewaarden $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$, wordt het interpolatiepolynoom $p_n(x)$, gegeven door

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x), \text{ met} \\
L_i(x) &= \frac{(x - x_0)(\ldots)(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(\ldots)(x - x_n)}{(x_i - x_0)(\ldots)(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(\ldots)(x_i - x_n)}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Verder zijn de volgende meetwaarden gegeven in tabelvorm:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	1	2
2	2	4

(a) Geef het lineaire interpolatiepolynoom van Lagrange met steunpunten x_0 en x_1. (1pt.)

(b) Geef de kwadratische interpolatieformule van Lagrange met steunpunten x_0, x_1 en x_2. (2pt.)

(c) Benader $f(0.5)$ eerst met lineaire interpolatie en dan met kwadratische interpolatie. (2pt.)

Gegeven is de Newton-Raphson methode

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

(d) Leid de bovenstaande Newton-Raphson methode af. (2pt.)

(e) We zoeken het positieve nulpunt van $f(x) = x^2 - 2x - 2$. Neem als startwaarde $p_0 = 2$ en bepaal p_1 met de Newton-Raphson methode. (1pt.)

(f) Laat p de oplossing van $f(p) = 0$ zijn. Toon aan dat dan geldt

$$|p - p_{n+1}| = K|p - p_n|^2, \text{ voor } n \to \infty \tag{4}$$

en bepaal de waarde van de constante K. (2pt.)