TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU)
donderdag 17 april 2014, 18:30-21:30

1. We beschouwen het volgende beginwaardeprobleem

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = y_0, \tag{1}$$

dat opgelost wordt met de achterwaartse Euler tijdsintegratie methode.

$$w_{n+1} = w_n + hf(t_{n+1}, w_{n+1}). \tag{2}$$

a Gebruik de testvergelijking, om aan te tonen dat de locale afbreekfout bij toepassing van de achterwaartse methode van Euler van de orde $O(h)$ is. *Hint:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. \tag{3}$$

(3pt.)

b Gebruik de testvergelijking, om aan te tonen dat voor een algemene complexe $\lambda = \mu + i\nu$ de numerieke oplossing stabiel is als

$$(1 - h\mu)^2 + (h\nu)^2 \geq 1. \tag{4}$$

Schets het stabiliteitsgebied in het complexe vlak. (2pt.)

We passen de achterwaartse methode van Euler toe op de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1(1 - (y_1 + 2y_2)), \\ y_2' &= y_2(1 - (y_1 + y_2)), \end{aligned} \tag{5}$$

met een beginvoorwaarde die we later geven.

c Leid de Jacobi matrix af door linearisering van stelsel (5) rond $(y_1, y_2) = (0, 1)$, en geef zijn eigenwaarden. (1pt.)

d
- Bepaal de maximaal toelaatbare tijdstap rond $(y_1, y_2) = (0, 1)$ waarvoor lineaire stabiliteit gegarandeerd wordt voor de achterwaartse methode van Euler. (1.5pt.)
- Doe hetzelfde voor de voorwaartse methode van Euler. (1.5pt.)

We gebruiken de voorwaartse methode van Euler om de oplossing te benaderen.

e Gebruik de beginvoorwaarde $(y_1(0), y_2(0)) = (0.25, 0.5)$ en tijdstap $h = 1$ om de numerieke oplossing na een tijdsstap te berekenen. (1pt.)

---

[0]**voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. (a) We zoeken een formule van de vorm:

$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h^2} f(0) + \frac{\alpha_{-1}}{h^2} f(-h) + \frac{\alpha_{-2}}{h^2} f(-2h),$$

zodat

$$f''(0) - Q(h) = O(h).$$

Geef het lineaire stelsel vergelijkingen waar α_0, α_{-1} en α_{-2} aan moeten voldoen. (2 pt)

(b) De oplossing van het in het vorige onderdeel afgeleide stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = 1$, $\alpha_{-1} = -2$ en $\alpha_{-2} = 1$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $f''(0) - Q(h)$. (2 pt)

(c) Gebruik de getallen gegeven in Tabel 1. Geef met behulp van de Richardson

x	$f(x)$
0	0
$-\frac{1}{4}$	0.0156
$-\frac{1}{2}$	0.1250
$-\frac{3}{4}$	0.4219
- 1	1.0000

Tabel 1: De gebruikte waarden

methode een schatting van de fout: $f''(0) - Q(\frac{1}{4})$. (2 pt)

(d) Gegeven is dat de tabelwaarden een maximale afrondfout hebben van ϵ: $|f(x) - \hat{f}(x)| \leq \epsilon$. Laat zien, dat voor de afrondfout in de benadering geldt:

$$|Q(h) - \hat{Q}(h)| \leq \frac{C_1 \epsilon}{h^2}$$

en geef C_1 en ϵ. (2 pt)

(e) Als gegeven is dat $f''(0) - Q(h) = 6h$, geef dan de optimale waarde van h zodat de totale fout $|f''(0) - \hat{Q}(h)|$ minimaal is. (2 pt)