TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU AESB2210)
Thursday April 16 2015, 18:30-21:30

1. Om het beginwaardeprobleem, gegeven door $y' = f(t, y)$, met $y(t^0) = y^0$, te integreren, beschouwen we de Trapezium Regel

$$w^{n+1} = w^n + \frac{h}{2}(f(t^n, w^n) + f(t^{n+1}, w^{n+1})), \tag{1}$$

en de Modified Euler Methode.

[a] Bepaal de versterkingsfactoren van beide methoden. (2pt.)

[b] Laat voor beide methoden zien dat de locale afbreekfout van orde $O(h^2)$ is.

Hint: U mag de test–vergelijking voor zowel de Trapezium Regel als de Modified Euler Methode gebruiken. Verder geldt $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$ *en voor* $|x| < 1$ *geldt* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$. (3pt.)

We passen beide methoden toe op het beginwaardeprobleem

$$y'' = -4y + 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \tag{2}$$

[c] Laat zien dat dit beginwaardeprobleem herschreven kan worden als het volgende stelsel vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \tag{3}$$

met beginvoorwaarde $y_1(0) = 1$ en $y_2(0) = 0$. (1pt.)

[d] Gebruik $h = \frac{1}{2}$ om w^1 (één tijdsstap) te berekenen met zowel de Trapezium Regel als de Modified Euler Methode. (2pt.)

[e] Welke van de twee methoden toegepast op het huidige beginwaardeprobleem heeft volgens u de voorkeur? Licht uw keuze toe in termen van nauwkeurigheid, stabiliteit en hoeveelheid werk. (2pt.)

[0] **voor vervolg z.o.z. Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie: http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html**

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem (tweede orde differentiaalvergelijking met randvoorwaarden op $x = 0$ en $x = 1$):

$$\begin{cases} -y'' + xy - x^3 + 2 = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

   (a) Laat zien dat $y(x) = x^2$ de oplossing is van het probleem (4). (1pt.)

   (b) Laat h de stapgrootte zijn, geef een discretisatie met een lokale afbreekfout van $O(h^2)$ (+ bewijs). Gebruik een virtueel gridpunt bij $x = 0$. (2pt.)

   (c) Gebruik een stapgrootte van $h = 1/3$ om het stelsel vergelijkingen $Ay_h = b$ af te leiden. Verwerk de randvoorwaarden. Het afgeleide stelsel heeft drie vergelijkingen met drie onbekenden, dat betekent dat A een 3×3 matrix is en y_h en b 1×3 kolomvectoren zijn. (2pt.)

   (d) Geef de numerieke oplossing als een stapgrootte van $h = 1/3$ gebruikt wordt. Waarom is de fout $e(x) = y_h(h) - y(x)$ gelijk aan nul in alle gridpunten $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ and $x_3 = 1$? (1pt.)

Vervolgens willen we de integraal $\int_0^1 y(x)dx$ numeriek benaderen.

   (e) Geef de Rechthoekregel I^R. Geef ook de bijbehorende samengestelde integratieregels $I^R(h)$. Benader de integraal $\int_0^1 y(x)dx$ met behulp van de samengestelde Rechtshoekregel, met $h = 1/3$. (1pt.)

   (f) Herhal deel (e) met de Trapeziumregel (I^T en $I^T(h)$). (1pt.)

   (g) Stel dat men $\int_0^1 y(x)dx$ benadert, dan is de grootte van de fout van de samengestelde regels (ε_R en ε_T voor de Rechthoek- en Trapeziumregel, respectievelijk) begrensd door

$$\varepsilon_R \leq \frac{h}{2} \max_{x \in [0,1]} |y'(x)|, \quad \varepsilon_T \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |y''(x)|. \tag{5}$$

   Welke methode verdient de voorkeur als het aantal integratiepunten groot is? Motiveer uw voorkeur. (2pt.)