TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WI3097 TU/Minor AESB2210)
Donderdag 14 April 2016, 18:30-21:30

1. We beschouwen het volgende beginwaardeprobleem

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = y_0, \tag{1}$$

dat opgelost wordt met de **achterwaartse Euler tijdsintegratie methode**.

$$w_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_{n+1}, w_{n+1}). \tag{2}$$

(a) Gebruik de **testvergelijking**, om aan te tonen dat de locale afbreekfout bij toepassing van de **achterwaartse methode van Euler** van de orde $\mathcal{O}(\Delta t)$ is. *Hint:*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. \tag{3}$$

(3 pt.)

(b) Gebruik de **testvergelijking**, om aan te tonen dat voor een algemene complexe $\lambda = \mu + i\nu$ de numerieke oplossing stabiel is als

$$(1 - \Delta t\mu)^2 + (\Delta t\nu)^2 \geq 1. \tag{4}$$

Schets het stabiliteitsgebied in het complexe vlak. (2 pt.)

We passen de **achterwaartse methode van Euler** toe op de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1^2 + 2y_1y_2, \\ y_2' &= -y_1y_2 - \tfrac{1}{2}y_2^2, \end{aligned} \tag{5}$$

met een beginvoorwaarde die we later geven.

(c) Leid de Jacobi matrix af door linearisering van stelsel (5) rond $(y_1, y_2) = (1, 0)$, en geef zijn eigenwaarden. (1 pt.)

(d) Bepaal de maximaal toelaatbare tijdstap rond $(y_1, y_2) = (1, 0)$ waarvoor lineaire stabiliteit gegarandeerd wordt voor de **achterwaartse methode van Euler**. (1.5 pt.)
Hint: Als je onderdeel (c) niet kan beantwoorden kan je uitgaan van $\lambda_1 = -4$ en $\lambda_2 = -3$ (let op, dit zijn **niet** de correcte eigenwaarden).
Doe hetzelfde voor de **voorwaartse methode van Euler**. (1.5 pt.)

We gebruiken de **voorwaartse methode van Euler** om de oplossing te benaderen.

(e) Gebruik de beginvoorwaarde $(y_1(0), y_2(0)) = (1, 0)$ en tijdstap $\Delta t = 1$ om de numerieke oplossing na een tijdsstap te berekenen. (1 pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. Van een boorinstallatie zoals gebruikt in de aardwetenschappen toepassingen om gaten in de aarde ondergrond te boren wordt de snelheid geschat. De gemeten diepte d van de boorbeitel van het oppervlak van de aarde staan in de onderstaande tabel:

t (min)	0	5	10
$d(t)$ (cm)	0	250	550

   (a) Geef de **eerste orde achterwaartse differentieformule** en bepaal hiermee een schatting van de snelheid op $t = 10$ ($d'(10)$). (1.5 pt.)

   (b) We zoeken een differentieformule voor de eerste afgeleide van d in het punt $2h$ van de vorm:
$$Q(h) = \frac{\alpha_0}{h}d(0) + \frac{\alpha_1}{h}d(h) + \frac{\alpha_2}{h}d(2h),$$
zodat
$$d'(2h) - Q(h) = O(h^2).$$
In de rest van de opgave werken we verder met deze formule. Laat zien dat de coefficienten α_0, α_1 en α_2 moeten voldoen aan het volgende stelsel:
$$\begin{array}{rcrcrcl} \frac{\alpha_0}{h} & + & \frac{\alpha_1}{h} & + & \frac{\alpha_2}{h} & = & 0\,, \\ -2\alpha_0 & - & \alpha_1 & & & = & 1\,, \\ 2\alpha_0 h & + & \frac{1}{2}\alpha_1 h & & & = & 0\,. \end{array}$$
(2 pt.)

   (c) De oplossing van dit stelsel wordt gegeven door $\alpha_0 = \frac{1}{2}$, $\alpha_1 = -2$ en $\alpha_2 = \frac{3}{2}$. Geef voor deze waarden een uitdrukking voor de afbreekfout $d'(2h) - Q(h)$. Geef opnieuw een schatting van de snelheid op $t = 10$. (1.5 pt.)

3. We onderzoeken **Lagrange interpolatie**. Voor gegeven steunpunten x_0, x_1, ..., x_n met bijbehorende functiewaarden $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$, wordt het interpolatiepolynoom $L_n(x)$, gegeven door
$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{kn}(x), \text{ met}$$
$$L_{kn}(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}. \qquad (6)$$

   (a) Geef het **lineaire interpolatiepolynoom van Lagrange** $L_1(x)$ met steunpunten x_0 en x_1. (1 pt.)

   (b) Geef het **kwadratische interpolatiepolynoom van Lagrange** $L_2(x)$ met steunpunten x_0, x_1 en x_2. (2 pt.)

   (c) Bereken $L_n(2)$ en $L_n(3)$ eerst met lineaire interpolatie en dan met kwadratische interpolatie voor de volgende meetwaarden gegeven in tabelvorm:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1	3
1	3	6
2	4	5

(2 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html