

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik

Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR
DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (CTB2400)
Dinsdag 14 augustus 2018, 13:30-16:30

SCHRIJF ALSTUBLIEFT DE CORRECTE VAKCODE WAARONDER JE JOUW
RESULTAAT IN OSIRIS WILT HEBBEN OP JOUW ANTWOORDVELLEN.

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 11 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.

Antwoorden: Alle antwoorden moeten argumenten en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen geven geen punten.

Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische rekenmachine is toegestaan. Alle andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. De Voorwaartse methode van Euler om het beginwaardeprobleem gedefinieerd door $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, te integreren is gegeven door

$$w_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n),$$

waarin Δt de tijdstap is en w_n de numerieke oplossing op tijd t_n is.

- (a) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* van de gegeven methode in het algemeen $\mathcal{O}(\Delta t)$ is.

Opmerking: Maak geen gebruik van de testvergelijking. . (3 pt.)

- (b) De *versterkingsfactor* van deze methode is gegeven door

$$Q(\lambda \Delta t) = 1 + \lambda \Delta t.$$

Leid deze versterkingsfactor af voor de gegeven methode. (1 pt.)

- (c) Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

met beginvoorwaarden $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Voor welke waarden van $\Delta t \geq 0$ is de gegeven methode *stabiel* voor dit beginwaardeprobleem? (3½ pt.)

- (d) Voer *twee stappen* uit met de gegeven methode met $\Delta t = 1/5$ en $t_0 = 0$ voor het beginwaardeprobleem (1) en de gegeven beginvoorwaarden. (2½ pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We beschouwen de convectie–diffusie vergelijking met Dirichlet randvoorwaarden:

$$\begin{cases} -u'' + u' = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

waarin $u = u(x)$, $u' = \frac{du}{dx}$ en $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$. De oplossing wordt gegeven door: $u(x) = x - \frac{1-e^x}{1-e}$. In deze opgave proberen we een numerieke oplossing van dit probleem te bepalen.

- (a) Geef een (fysische of wiskundige) *motivatie* waarom oscillerende numerieke oplossingen voor (2) als onbetrouwbaar gezien moeten worden. (1 pt.)
- (b) We lossen randwaardeprobleem (2) op met eindige differenties, waarbij $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$, met Δx als uniforme stapgrootte. Na discretisatie krijgen we de volgende formules:

$$\begin{aligned} -\frac{w_2 - 2w_1}{(\Delta x)^2} + \frac{w_2}{2\Delta x} &= 1 \\ -\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{(\Delta x)^2} + \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2\Delta x} &= 1, \quad \text{for } j \in \{2, \dots, n-1\}, \\ \frac{2w_n - w_{n-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{w_{n-1}}{2\Delta x} &= 1. \end{aligned}$$

Geef (met bewijs) de *orde* van de *lokale afbreekfout* van dit schema. (3 pt.)

- (c) Kies $\Delta x = 1/4$ en bepaal het *stelsel vergelijkingen* $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$. (1 pt.)

3. Om $\int_a^b f(x) dx$ te benaderen kan de trapeziumregel $\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$ gebruikt worden.

- (a) Geef het *lineaire interpolatiepolynoom* $p_1(x)$ van Lagrange met steunpunten a en b en *leid* met behulp van $p_1(x)$ de trapeziumregel af. (1½ pt.)
- (b) De fout voor lineaire interpolatie over steunpunten a en b wordt gegeven door

$$f(x) - p_1(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi(x)), \quad \text{voor zekere } \xi(x) \in (a, b).$$

Leid af dat een *bovengrens* van de afbreekfout van de enkelvoudige trapeziumregel over het interval $[a, b]$ gegeven is door

$$\frac{1}{12}(b-a)^3 \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|, \quad (3)$$

gegeven dat de tweede orde afgeleide van f continu is op $[a, b]$. (1½ pt.)

- (c) *Benader* $\int_0^1 x^2 dx$ met de gerepeteerde trapeziumregel met $h = \frac{1}{4}$. (1 pt.)
- (d) Geef de absolute waarde van de *afbreekfout* van het antwoord gegeven in (c). (1 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:

<http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html>