TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(WI3097TU WI3097Minor WI3197Minor AESB2210 AESB2210-18 CTB2400)
Donderdag 4 juli 2019, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 12 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Voor het beginwaardeprobleem $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$, gebruiken we de integratiemethode

$$\begin{cases} w_{n+1}^* = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{\Delta t}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w_{n+1}^*)\right), \end{cases} \tag{1}$$

waarin Δt de tijdstap en w_n de numerieke oplossing op tijdstip t_n voorstelt.

(a) Toon aan dat de locale afbreekfout van deze integratiemethode van de orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. (U mag hier niet de testvergelijking gebruiken.) (3pt.)

Gegeven is het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = \cos t, \\ y(0) = 1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

(b) Laat zien dat bovenstaand beginwaardeprobleem geschreven kan worden als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Geef ook de beginvoorwaarden voor $x_1(0)$ en $x_2(0)$. (1pt.)

(c) Bereken één stap met de methode gegeven in (1), waarbij $\Delta t = 0.1$ en $t_0 = 0$ toegepast op (3) met de gegeven beginvoorwaarden. (2pt.)

(d) Leid de versterkingsfactor voor deze integratiemethode af. (2pt.)

(e) Onderzoek voor welke Δt integratiemethode (1) toegepast op het beginwaardeprobleem (3) stabiel is. (2pt.)

x	$f(x)$
1	-1
$4/3$	$-2/9$
$7/5$	$-1/25$
$10/7$	$2/49$
2	2

2. We willen een benadering vinden van het nulpunt p van een functie f, d.w.z. we willen p vinden zodat $f(p) = 0$. Echter, we weten de functie f niet, maar alleen een paar waardes van f in een aantal punten x zijn bekend, die in de tabel aan de rechterkant staan.

   Daarom overwegen we om de Secant-methode te gebruiken:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{K_{n-1}}, \tag{4}$$

   met K_{n-1} een benadering van $f'(p_{n-1})$, en waarin p_{n-2}, p_{n-1} en p_n drie opeenvolgende benaderingen van het nulpunt p zijn.
   Vergelijking (4) is gebaseerd op het opstellen van het lineaire interpolerende polynoom L van f gebaseerd op p_0 en p_1:

$$L(x) = f(p_0) + \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}(x - p_0),$$

   waarna p_2 gevonden wordt door $L(p_2) = 0$ op te lossen voor p.

   (a) *Laat zien* dat, voor $n = 2$, K_1 gegeven is door

$$K_1 = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0},$$

   door $L(p_2) = 0$ op te lossen voor p_2. (2 pt.)

   (b) Neem $p_0 = 1$ en $p_1 = 2$. *Benader* het nulpunt p van f door p_2 te berekenen. Je mag p_2 afronden tot een waarde van x zoals gegeven in de tabel. (1 pt.)

   (c) Herhaal de bovenstaande stappen met $n = 3$ door de formule voor K_2 te *geven* en door p_3 te *berekenen*. Je mag p_3 afronden tot een waarde van x zoals gegeven in de tabel. (2 pt.)

3. We zijn geïnteresseerd in de numeriek integratie van de integraal

$$\int_0^{2\pi} y(x)dx,$$

   met $y(x) = 1 + \sin(x)$.

   (a) *Benader* de bovenstaand integraal met de *rechter samengestelde Rechthoekregel* met $h = \pi/2$. ($1^1/_2$ pt.)

   (b) *Benader* de bovenstaand integraal met de *samengestelde Trapeziumregel* met $h = \pi/2$. (1 pt.)

   (c) De grootte van de fouten ε_R en ε_T van de benaderingen zijn begrensd door

$$\varepsilon_R \leq \pi h \max_{x\in[0,2\pi]} |y'(x)|,$$

   rechter samengestelde Rechthoekregel en door

$$\varepsilon_T \leq \frac{\pi}{6} h^2 \max_{x\in[0,2\pi]} |y''(x)|,$$

   voor de samgengestelde Trapeziumregel. *Geef* expliciete bovengrenzen voor beide regels voor algemene waarden van h. ($1^1/_2$ pt.)

   (d) *Selecteer en motiveer* aan welke methode jij de voorkeur geeft als h klein wordt. (1 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html