TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(WI3097TU WI3097Minor WI3197Minor AESB2210 AESB2210-18 CTB2400)
Dinsdag 13 augustus 2019, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 11 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten argumenten en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen geven geen punten.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $^P/_2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. We beschouwen de volgende methode

$$\begin{cases} w_{n+1}^* = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ \\ w_{n+1} = w_n + \Delta t \left(a_1 f(t_n, w_n) + a_2 f(t_{n+1}, w_{n+1}^*)\right) \end{cases}$$

voor de integratie van een **beginwaardeprobleem** $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. De constanten a_1 en a_2 voldoen aan $a_1 + a_2 = 1$.

(a) Laat zien dat de *lokale afbreekfout* (local truncation error) van bovenstaande methode van orde $\mathcal{O}(\Delta t)$ in het algemeen is. Voor *welke waarde(s)* van a_1 and a_2 zal de bovenstaande methode een lokale afbreekfout van orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ hebben? ($3\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat voor *algemene waardes van* a_1 and a_2 de *versterkingsfactor* (amplification factor) gegeven is door

$$Q(\lambda \Delta t) = 1 + \lambda \Delta t + a_2 (\lambda \Delta t)^2.$$

($1\frac{1}{2}$ pt.)

(c) Beschouw $\lambda < 0$ en $1 - 8a_2 < 0$. Laat zien dat de bovenstaande methode *stabiel* is voor alle $\Delta t > 0$ die voldoen aan

$$\Delta t \leq \frac{-1}{a_2 \lambda}.$$

(2 pt.)

(d) We bekijken het volgende *stelsel van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen*:

$$\begin{cases} x_1' &= \cos x_1 - 2x_2 + t, \\ x_2' &= \frac{1}{2}x_1 - x_2^2, \\ x_1(0) &= \pi, \\ x_2(0) &= 1. \end{cases} \tag{1}$$

We kiezen $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. Voor welke *waarde* van Δt is de methode toegepast op (1) stabiel op $t = 0$? ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(e) We kiezen weer $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$. *Voer één tijdstap* met de gegeven methode en $\Delta t = 1$ *uit* om een benadering van de oplossing van het stelsel (1) op $t = 1$ te krijgen. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

voor vervolg z.o.z.

2. We bekijken het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -y''(x) + y(x) &= 2e^x, \quad x \in (0,1), \\ y(0) &= 2, \\ y'(1) &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

De exacte oplossing is gegeven door

$$y(x) = e^x(2 - x). \tag{3}$$

In deze opdracht gaan we proberen deze exacte oplossing te benaderen met een numerieke methode.

(a) *Laat zien* dat vergelijking (3) inderdaad de exacte oplossing is van probleem (2). (1 pt.)

(b) We lossen het randwaardeprobleem (3) op met behulp van eindige differenties met een lokale afbreekfout van $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, nadat we gekozen hebben voor $x_j = j\Delta x$, $n\Delta x = 1$, met Δx de uniforme stapgrootte. Na discretisatie vinden we de volgende formules:

$$\begin{aligned} -\frac{w_2 - 2w_1}{(\Delta x)^2} + w_1 &= 2e^{\Delta x} + \frac{2}{\Delta x^2}, \\ -\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{(\Delta x)^2} + w_j &= 2e^{j\Delta x}, \qquad \text{voor } j \in \{2, \ldots, n-1\}, \\ -\frac{-2w_n + 2w_{n-1}}{(\Delta x)^2} + w_n &= 2e. \end{aligned}$$

Geef (met argumenten) de *afleiding* van dit stelsel. (3 pt.)

(c) Kies $\Delta x = 1/3$ en leid het *stelsel vergelijkingen* $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ af met $\mathbf{w} = [w_1, \ldots, w_n]^T$. Schrijf A en $\mathbf{b}$ expliciet op in jouw antwoord. (1 pt.)

3. Om $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ te benaderen kan de regel van Simpson

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

worden gebruikt. De regel van Simpson is gebaseerd op de aanname $f(x) \approx L_2(x)$, met $L_2(x)$ het kwadratisch interpolerend polynoom met knopen $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ en $x_2 = b$. We weten verder de volgende integralen:

$$\int_{x_0}^{x_2} L_{k2}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{6}(x_2 - x_0) & \text{als } k \in \{0, 2\}, \\ \frac{2}{3}(x_2 - x_0) & \text{als } k = 1, \end{cases}$$

waarbij $L_{k2}(x)$ het kwadratische Lagrange basispolynoom is van knoop x_k.

(a) Geef een *afleiding* van de regel van Simpson. (2 pt.)

(b) Gegeven is dat een bovengrens voor de afbreekfout van de regel van Simpson I is

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I\right| \leq \frac{1}{2880} m_4 (b-a)^5,$$

met $m_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$.
Laat zien dat de regel van Simpson exact is voor polynomen van graad 3 en lager. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(c) *Benader* $\displaystyle\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$ met de regel van Simpson en geef de absolute waarde van de *afbreekfout* van deze benadering. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html