TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT
FACULTEIT ELEKTROTECHNIEK, WISKUNDE EN INFORMATICA

Verantwoordelijk examinator: C. Vuik
Reviewer tentamen: D. den Ouden-van der Horst

TENTAMEN NUMERIEKE METHODEN VOOR DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN
(WI3097TU WI3197Minor AESB2210-18 CTB2400)
31 januari 2019, 13:30-16:30

Aantal vragen: Dit is een tentamen met 9 open vragen, onderverdeeld in 3 hoofdvragen.
Antwoorden: Alle antwoorden moeten beargumenteerd worden en/of berekeningen bevatten. Antwoorden zonder argumenten of berekeningen leveren geen punten op.
Hulpmiddelen: Alleen een niet-grafische, niet-programmeerbare rekenmachine is toegestaan. Alle andere elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.
Beoordeling: In totaal kunnen 20 punten verdiend worden. Het onafgeronde eindcijfer is gegeven door $P/2$, waarin P het aantal behaalde punten is.

1. Voor het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, gebruiken we de Modified Euler methode

$$\begin{cases} w^*_{n+1} = w_n + \Delta t f(t_n, w_n) \\ w_{n+1} = w_n + \dfrac{\Delta t}{2}\left(f(t_n, w_n) + f(t_{n+1}, w^*_{n+1})\right), \end{cases} \tag{1}$$

Hier is Δt de tijdstap en stelt w_n de numerieke benadering van $y(t_n)$ na n tijstappen voor.

We bekijken ook het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

gecombineerd met de beginvoorwaarden $x_1(0) = 0$ en $x_2(0) = 1$ tot een beginvooorwaardeprobleem.

(a) Laat zien dat de lokale afbreekfout van de tijdsintegratiemethode van orde $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ is. ($3\frac{1}{2}$ pt.)
(Je mag hier niet de testvergelijking gebruiken.)

(b) Bereken één stap met de Modified Euler methode (1), met $\Delta t = 1$ en $t_0 = 0$, toegepast op (2) en gebruik de gegeven beginvoorwaarden. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(c) Bepaal de versterkingsfactor $Q(\lambda \Delta t)$ van de integratiemethode (1). (1 pt.)

(d) Bepaal voor welke tijdstappen $\Delta t > 0$ de tijdsintegratiemethode (1), toegepast op het stelsel (2), stabiel is. (4 pt.)

2. We beschouwen het volgende randwaardeprobleem:

$$\begin{cases} -y''(x) + 4y(x) &= 4e^{2x}, \quad x \in (0,1), \\ y(0) &= \frac{3}{2}, \\ y'(1) &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

In deze opdracht proberen we de exacte oplossing te benaderen met een numerieke techniek.

We lossen het randwaardeprobleem (3) op met behulp van centrale eindige differenties met een lokale afbreekfout van $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, na gekozen te hebben voor $x_j = j\Delta x$, $(n+1)\Delta x = 1$, waarbij Δx de uniforme stapgrootte is. Na discretisatie krijgen we de volgende formules:

$$-\frac{w_2 - 2w_1}{\Delta x^2} + 4w_1 = 4e^{2\Delta x} + \frac{3}{2\Delta x^2},$$

$$-\frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{\Delta x^2} + 4w_j = 4e^{2j\Delta x}, \qquad \text{voor } j \in \{2, \dots, n\},$$

$$-\frac{-w_{n+1} + w_n}{\Delta x^2} + 2w_{n+1} = 2e^2.$$

(a) Geef (met argumenten) de afleiding van dit schema. ($3\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Kies $\Delta x = 1/4$ en leid het stelsel van vergelijkingen af die deze keuze geeft. Herschrijf bovendien dit stelsel naar de vorm $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ met $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_{n+1}]^T$. Geef expliciet A en $\mathbf{b}$ in jouw antwoord. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

3. Om $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ te benaderen kan de regel van Simpson

$$I_S = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

gebruikt worden. De regel van Simpson is gebaseerd op de aanname $f(x) \approx L_2(x)$, met $L_2(x)$ het kwadratische Lagrange interpolatie polynoom met steunpunten $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ en $x_2 = b$:

$$L_2(x) = \sum_{k=0}^{2} L_{k2}(x) f(x_k),$$

waarbij $L_{k2}(x)$ het kwadratische Lagrange basis polynoom is bij steunpunt x_k.

We weten tevens de volgende integralen:

$$\int_{x_0}^{x_2} L_{k2}(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{6}(x_2 - x_0) & \text{als } k \in \{0, 2\}, \\ \frac{2}{3}(x_2 - x_0) & \text{als } k = 1. \end{cases}$$

Gegeven is ook dat een bovengrens voor de afbreekfout van de regel van Simpson I_S gegeven is door

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_S\right| \le \frac{1}{2880} m_4 (b-a)^5,$$

met $m_4 = \max_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)|$.

(a) Geef een afleiding van de regel van Simpson I_S. ($2\frac{1}{2}$ pt.)

(b) Laat zien dat de regel van Simpson exact is voor polynomen van graad 3 en lager. ($1\frac{1}{2}$ pt.)

(c) Benader $\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ met de regel van Simpson en geef een bovengrens voor de absolute waarde van de afbreekfout in deze benadering. (1 pt.)

Voor de uitwerkingen van dit tentamen zie:
http://ta.twi.tudelft.nl/nw/users/vuik/wi3097/tentamen.html