



Technische Universiteit Delft  
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica  
Delft Institute of Applied Mathematics

## Energieverlies bij warmwaterleidingen

Verslag ten behoeve van het  
Delft Institute for Applied Mathematics  
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE**  
in  
**TECHNISCHE WISKUNDE**

door

**MENEL RAHRAH**

Delft, Nederland  
Juni 2010





**BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE**

**“Energieverlies bij warmwaterleidingen”**

MENEL RAHRAH 1364529

**Technische Universiteit Delft**

**Begeleider**

Prof.dr.ir. C. Vuik

**Overige commissieleden**

Ir. H.F.M. Corstens

Dr. J.G. Spandaw of Drs. A. Verweij

Juni, 2010

Delft



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Probleemstelling</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Analyse van het probleem</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Het wiskundig model</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>De circulatieleiding</b>	<b>13</b>
4.1	Warmtebalans . . . . .	13
4.1.1	Niet-geïsoleerde circulatieleiding . . . . .	13
4.1.2	Geïsoleerde circulatieleiding . . . . .	14
4.2	Analytische oplossing voor de niet-geïsoleerde leiding . . . . .	15
4.3	Numerieke oplossing . . . . .	18
4.3.1	Niet-geïsoleerde circulatieleiding . . . . .	18
4.3.2	Geïsoleerde circulatieleiding . . . . .	21
4.4	Berekening van het energieverbruik en de kosten . . . . .	24
4.5	Parametervariatie . . . . .	25
4.6	Evaluatie van de resultaten . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Warmtapwaterleiding (Stationair probleem)</b>	<b>28</b>
5.1	Warmtebalans . . . . .	28
5.1.1	Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	28
5.1.2	Geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	29
5.2	Numerieke oplossing . . . . .	30
5.2.1	Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	30
5.2.2	Geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	31
5.3	Legionella-wetgeving . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Warmteoverdracht tussen de circulatie- en de warmtapwaterleiding</b>	<b>34</b>
<b>7</b>	<b>Warmtapwaterleiding (Instationair probleem)</b>	<b>35</b>
7.1	Differentiaalvergelijkingen . . . . .	35
7.1.1	Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	35
7.1.2	Geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	36
7.2	Numerieke oplossing . . . . .	37
7.2.1	Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	37
7.2.2	Geïsoleerde warmtapwaterleiding . . . . .	38
7.3	Legionella-wetgeving . . . . .	39
<b>8</b>	<b>Conclusies</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Symbolen- en waardenlijst</b>	<b>41</b>
A.1	Symbolenlijst . . . . .	41
A.2	Geïntroduceerde symbolen . . . . .	41
A.3	Waardenlijst . . . . .	42
<b>B</b>	<b>Getal van Reynolds</b>	<b>43</b>
<b>C</b>	<b>De warmteoverdrachtscoëfficiënt <math>u</math></b>	<b>44</b>

<b>D</b>	Maple-programma voor de analytische oplossingsmethode	<b>46</b>
<b>E</b>	Matlab-programma voor de niet-geïsoleerde circulatieleiding	<b>48</b>
<b>F</b>	Matlab-programma voor de geïsoleerde circulatieleiding	<b>50</b>
<b>G</b>	Matlab-programma voor de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding (Stationair)	<b>53</b>
<b>H</b>	Matlab-programma voor de geïsoleerde warmtapwaterleiding (Stationair)	<b>56</b>
<b>I</b>	Matlab-programma voor de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)	<b>59</b>
<b>J</b>	Matlab-programma voor de geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)	<b>63</b>
<b>K</b>	Numerieke oplossingen van de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)	<b>68</b>
	K.1 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 63\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	68
	K.2 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 61\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	68
<b>L</b>	Numerieke oplossingen van de geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)	<b>69</b>
	L.1 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 63\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	69
	L.2 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 61\text{ }^{\circ}\text{C}$ . . . . .	69

## Voorwoord

Om het energieverlies te beperken, is het gebruikelijk bij warmwaterinstallaties om te isoleren. In dit verslag zullen we onderzoeken hoe groot de energie- en dus kostenbesparing zal zijn bij een circulatieleiding. Daarnaast blijkt het isoleren van invloed te zijn op de uiteindelijke temperatuur van het warme water bij het watertappunt. Eveneens is het isoleren uiteraard van invloed op de snelheid waarmee het water afkoelt.

Daarentegen kunnen we warmtapwaterleidingen alleen isoleren als we voldoen aan de Legionella-wetgeving. Meestal is het advies uit het oogpunt van de bestrijding van de Legionellabacterie dan ook om niet te isoleren, ook niet in onverwarmde ruimtes. Uitgezonderd op deze regel zijn circulatieleidingen en leidingen van een collectief warmwatersysteem. We zullen dus ook onderzoeken of dit advies wel klopt, zo niet dan kunnen we voor warmtapwaterleidingen ook de energiebesparing door te isoleren berekenen.

In het kader van het bachelorproject heb ik, begeleid door de heer C. Vuik, via het bedrijf **Van Galen Klimaattechniek**<sup>1</sup> de opdracht gekregen om deze kwalitatieve inzichten om te zetten in kwantitatieve resultaten welke een pragmatisch beeld vormen waaruit duidelijk wordt in welke situaties isolatie aan te bevelen is.

---

<sup>1</sup>[www.vangalen.com](http://www.vangalen.com)

# 1 Probleemstelling

Het continu rondpompen van water op hoge temperatuur in circulatieleidingen brengt grote energieverliezen met zich mee. Het water dat circuleert in de leiding verliest (onnodig) permanent warmte aan de omgeving.

Het is eenvoudig te begrijpen dat hoe beter de leidingen en hun onderdelen geïsoleerd zijn, hoe beter de warmteverliezen kunnen worden beperkt. We zullen dus onderzoeken in hoeverre isolatie het energieverlies bij circulatieleiding beperkt, en omdat isoleren geld kost, zullen we ook bekijken wanneer het rendabel is om isolatie aan te brengen.

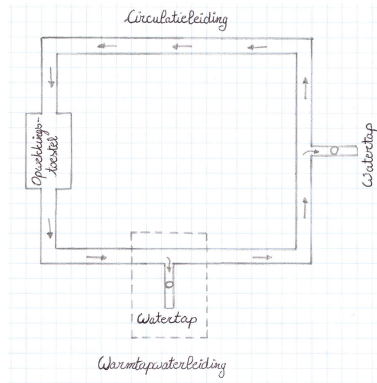
Maar als we aftakkingen ook isoleren, voldoen we dan nog steeds aan de Legionella-wetgeving? De Legionellabacterie blijkt onder bepaalde gunstige omstandigheden sterk in aantal toe te nemen. Optimale groeiomstandigheden zijn stilstaand water met een temperatuur tussen 25 en 55 graden Celsius (optimaal is 37 °C).

Bij aftakkingen kan het water lange tijd stilstaan en door te isoleren zorgen we ervoor dat het stilstaand water op hoge temperatuur blijft, waardoor groei van het aantal Legionellabacteriën mogelijk wordt. We zullen dus bestuderen of het handig is, uit het oogpunt van de bestrijding van de Legionellabacterie, om aftakkingen te isoleren.



## 2 Analyse van het probleem

In dit verslag beschouwen we twee problemen: circulatie- en warmtapwaterleiding, zie Figuur 1.



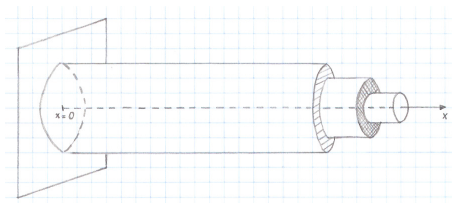
Figuur 1: Schets van de leidingen

Om deze problemen te kunnen oplossen gebruiken we wiskundige modellen. Hierbij maken we een aantal aannames om de problemen te vereenvoudigen en berekeningen aan de modellen mogelijk te maken.

Warmtetransport is mogelijk op drie manieren: door warmteconvectie, warmtestraling en warmteconductie. We veronderstellen dat in onze problemen warmtestraling verwaarloosbaar klein is ten opzichte van warmteconductie en warmteconvectie. Verder nemen wij aan dat het water in de leidingen voldoende snelheid heeft om warmteconductie in stroomrichting te kunnen verwaarlozen ten opzichte van convectief warmtetransport. Dus we hebben warmteconvectie in de stroomrichting als het water stroomt en warmteconductie als het water stilstaat, verder hebben we warmteconductie langs de leidingwand en de isolatielaag, en in de dwarsrichting waarbij warmteoverdracht aan de wand plaatsvindt.

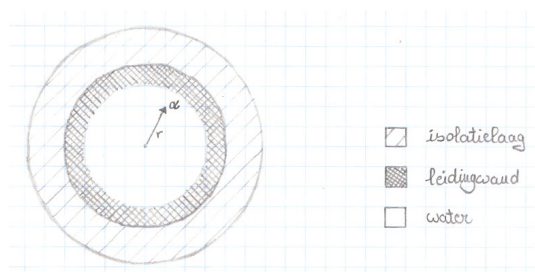
We nemen aan dat warmtapwater- en circulatieleidingen van koper zijn, en we veronderstellen dat de leidingwand en het isolatiemateriaal eromheen cirkelvormige dwarsdoorsneden hebben.

We nemen de  $x$ -as door het midden van de dwarsdoorsnede van de leiding met de oorsprong daar waar de circulatieleiding verbonden is met het opwekkingstoestel en de warmtapwaterleiding verbonden is met de circulatieleiding (zie Figuur 2).



Figuur 2: Geïsoleerde leiding

De temperatuur van het water in een bepaald punt hangt af van  $x$ , de afstand  $r$  tot de  $x$ -as en de tijd  $t$ , zie Figuur 3.



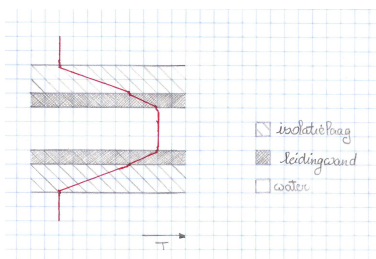
Figuur 3: Dwarsdoorsnede van de geïsoleerde leiding op afstand  $x$  van de bron

Uit het Reynoldsgetal (bepaald in Appendix B), blijkt dat we in de circulatieleiding met een turbulente stroming in de buizen te maken hebben. We kunnen dus aannemen dat de temperatuur  $T$  van het water onafhankelijk is van de afstand  $r$  tot de  $x$ -as. Deze vereenvoudiging laten we ook gelden voor het stilstaand water in de warmtapwaterleiding, omdat we ervan uitgaan dat de binnenstraal  $r_{in}$  van deze leiding klein is.

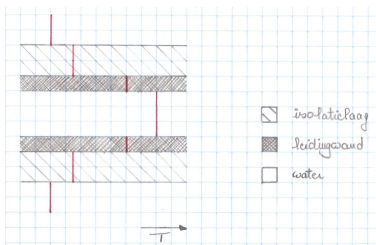
Omdat de leidingwand geen grote dikte heeft, kunnen we hiervoor aannemen dat de temperatuur onafhankelijk is van  $r$ , deze vereenvoudiging laten wij ook gelden voor de isolatielaag.

We nemen tevens aan dat de temperatuur van de omgeving  $T_{omg}$  overal constant blijft.

In Figuur 4 is een schets van het werkelijke temperatuurverloop afgebeeld, en het vereenvoudigde model daarvan is te zien in Figuur 5.



Figuur 4: Schets van het werkelijke temperatuurverloop van de geïsoleerde leiding



Figuur 5: Vereenvoudigde weergave van het temperatuurverloop

Omdat de omgevingstemperatuur en de temperatuur aan het begin van de leiding, op  $x = 0$ , constant zijn en het water in de circulatieleiding continu wordt rondgepompt, kunnen we hiervoor aannemen dat het temperatuurverloop in alle media onafhankelijk van de tijd wordt gesteld, dat wil zeggen dat het probleem stationair is. Dus voor alle media geldt dat de temperatuur alleen maar afhangt van  $x$ .

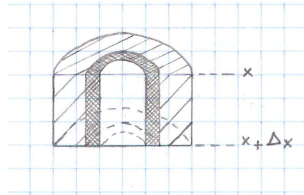
Bij de warmtapwaterleiding nemen we aan dat het watertappunt weinig malen per dag en ieder keer voor een korte tijd wordt open gehouden, we zullen dus alleen het geval bekijken waarin het watertappunt dicht is.

Op het moment dat we het watertappunt dicht doen, hangt het temperatuurverloop af van de tijd, het probleem is dan instationair. Voor alle media geldt dat de temperatuur afhangt van de afstand  $x$  en de tijd  $t$ .

Na een tijd bereikt de temperatuur een evenwicht en verandert het niet meer in de tijd, het probleem is dan stationair en de temperatuur hangt alleen af van  $x$ .

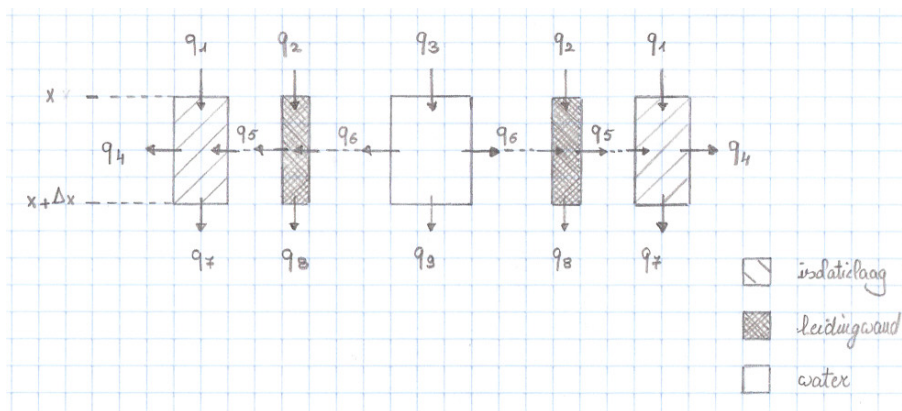
### 3 Het wiskundig model

We bekijken nu een stukje van de geïsoleerde leiding ter lengte  $\Delta x$ :



Figuur 6: Geïsoleerde leiding ter lengte  $\Delta x$

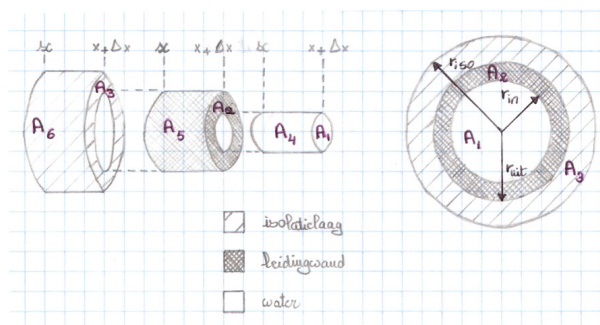
De totale warmteoverdracht door dit stukje is gegeven in Figuur 7.



Figuur 7: Warmteoverdracht in een geïsoleerde leiding ter lengte  $\Delta x$

In deze figuur representeren  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_7$  en  $q_8$  warmteconductie,  $q_3$  en  $q_9$  warmteconvectie als het water stroomt en warmteconductie in het geval van stilstaand water, en  $q_4$ ,  $q_5$  en  $q_6$  warmteoverdracht door de grenslagen.

Hierbij vindt warmteoverdracht plaats door in totaal 6 oppervlakten, deze zijn getekend in Figuur 8.



Figuur 8: Oppervlakte-aanduidingen voor een geïsoleerde leiding ter lengte  $\Delta x$

Deze oppervlakten  $A_i$ , met  $i = 1, \dots, 6$ , kunnen we als volgt bepalen:

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi r_{in}^2, & A_4 &= 2\pi r_{in} \Delta x; \\ A_2 &= \pi(r_{uit}^2 - r_{in}^2), & A_5 &= 2\pi r_{uit} \Delta x; \\ A_3 &= \pi(r_{iso}^2 - r_{uit}^2), & A_6 &= 2\pi r_{iso} \Delta x. \end{aligned}$$

Volgens de wet van Fourier geldt voor de warmtegeleidingsstroom, langs de leidingwand en de isolatielaag, per tijdseenheid:

$$q = -kA \frac{dT}{dx}. \quad (1)$$

De algemene formule voor de convectieve warmtestroom per tijdseenheid is:

$$q = C\dot{m}T, \quad (2)$$

waarbij de soortelijke warmte  $C$  de hoeveelheid warmte die nodig is om een kilogram van een bepaalde stof een graad Celsius ( $^{\circ}C$ ) of een Kelvin ( $K$ ) in temperatuur te doen stijgen.

Uit de afkoelingswet van Newton volgt voor de warmteoverdracht door de grenslagen:

$$q = uA\Delta T, \quad (3)$$

hierbij is  $u$  de warmteoverdrachtscoëfficiënt (zie Appendix C).

Voor de betekenis van de symbolen en de eenheden daarvan zie de symbolenlijst (Appendix A.1).

Uitgaande van de figuren 7 en 8, en de formules (1), (2) en (3) kunnen wij de warmtebalans voor een stukje ter lengte  $\Delta x$  uit de leiding opstellen.

## 4 De circulatieleiding

### 4.1 Warmtebalans

In het geval van een circulatieleiding hebben we te maken met een stationair probleem. We stellen de balansvergelijkingen dus samen volgens het principe: de hoeveelheid warmte die een laag instroomt is gelijk aan de hoeveelheid warmte die uitstroomt.

#### 4.1.1 Niet-geïsoleerde circulatieleiding

Gebruikmakend van Figuur 7 komen we tot de volgende twee vergelijkingen voor de leidingwand en voor het water respectievelijk, in het geval van een niet-geïsoleerde leiding:

$$q_2 + q_6 = q_5 + q_8; \quad (4)$$

$$q_3 = q_6 + q_9. \quad (5)$$

We berekenen  $q_2$  en  $q_8$  met formule (1),  $q_3$  en  $q_9$  met formule (2) omdat we nu met stromend water te maken hebben, en  $q_5$  en  $q_6$  met formule (3), dus geldt:

$$q_2 = -k_{pijp}A_2 \frac{dT_{pijp}}{dx}; \quad (6)$$

$$q_5 = u_{pijp \rightarrow omg}A_5(T_{pijp} - T_{omg}); \quad (7)$$

$$q_6 = u_{water \rightarrow pijp}A_4(T_{water} - T_{pijp}); \quad (8)$$

$$q_8 = -k_{pijp}A_2 \frac{dT_{pijp}}{dx} \Big|_{x+\Delta x} = -k_{pijp}A_2 \left( \frac{dT_{pijp}}{dx} + \frac{d^2T_{pijp}}{dx^2} \Delta x \right); \quad (9)$$

$$q_3 = C_{water} \dot{m} T_{water}; \quad (10)$$

$$q_9 = C_{water} \dot{m} T_{water} \Big|_{x+\Delta x} = C_{water} \dot{m} \left( T_{water} + \frac{dT_{water}}{dx} \Delta x \right), \quad (11)$$

waarbij  $T_{pijp}(x)$  de temperatuur is in de leidingwand, en  $T_{water}(x)$  de watertemperatuur is.

Na het invullen van de resultaten (6) tot en met (9) in vergelijking (4), en het vereenvoudigen van de verkregen vergelijking, krijgen we de volgende tweede orde differentiaalvergelijking voor de temperatuur in de leidingwand:

$$k_{pijp}(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2T_{pijp}}{dx^2} = 2u_{pijp \rightarrow omg}r_{uit}(T_{pijp} - T_{omg}) - 2u_{water \rightarrow pijp}r_{in}(T_{water} - T_{pijp}); \quad (12)$$

Als we de resultaten (8), (10) en (11) invullen in vergelijking (5), dan krijgen we na vereenvoudiging de volgende eerste orde differentiaalvergelijking voor de temperatuur in het water:

$$C_{water} \dot{m} \frac{dT_{water}}{dx} + 2\pi u_{water \rightarrow pijp} r_{in} (T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (13)$$

We hebben nu een stelsel differentiaalvergelijkingen (12) en (13) voor de niet-geïsoleerde leiding gekregen. Om dit stelsel te kunnen oplossen hebben we drie randvoorwaarden nodig.

Wij nemen aan dat de temperatuur van het water en van de leidingwand aan het begin van de leiding (op  $x = 0$ ) bekend zijn:

$$T_{water} \Big|_{x=0} = 65^\circ C \text{ en } T_{pijp} \Big|_{x=0} = 65^\circ C.$$

Verder, kunnen we aannemen dat aan het eind van de leiding (op  $x = L$ ) geldt:

$$\frac{dT_{pijp}}{dx} \Big|_{x=L} = 0.$$

### 4.1.2 Geïsoleerde circulatieleiding

We beschouwen nu een stukje geïsoleerde leiding ter lengte  $\Delta x$  zoals getekend in Figuur 7. De bijbehorende warmtebalansen zijn (4), (5) en

$$q_1 + q_5 = q_4 + q_7. \quad (14)$$

We kunnen nu, zoals bij de niet-geïsoleerde leiding, een stelsel differentiaalvergelijkingen opstellen. Uit Figuur 7 blijkt dat de differentiaalvergelijking voor het water (13) hetzelfde blijft. Voor de leidingwand geldt nu:

$$k_{pijpp}(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_{pijpp}}{dx^2} = 2u_{pijpp \rightarrow iso} r_{uit} (T_{pijpp} - T_{iso}) - 2u_{water \rightarrow pijpp} r_{in} (T_{water} - T_{pijpp}), \quad (15)$$

waarbij  $T_{iso}(x)$  de temperatuur weergeeft in de isolatielaag.

Analoog aan (15) kunnen we ook de differentiaalvergelijking voor het isolatiemateriaal opstellen, waarbij we  $q_1$  en  $q_7$  berekenen met formule (1) en  $q_4$  met formule (3), invullen in vergelijking (14) geeft voor de isolatielaag na vereenvoudiging:

$$k_{iso}(r_{iso}^2 - r_{uit}^2) \frac{d^2 T_{iso}}{dx^2} = 2u_{iso \rightarrow omg} r_{iso} (T_{iso} - T_{omg}) - 2u_{pijpp \rightarrow iso} r_{uit} (T_{pijpp} - T_{iso}). \quad (16)$$

We hebben nu een stelsel differentiaalvergelijkingen (13), (15) en (16) voor de geïsoleerde leiding. Dit stelsel bestaat uit één eerste orde en twee tweede orde differentiaalvergelijkingen. Nu hebben we dus vijf randvoorwaarden nodig.

Wij nemen aan dat de temperatuur van het water, de leidingwand en de isolatielaag aan het begin van de leiding (op  $x = 0$ ) bekend zijn:

$$T_{water} |_{x=0} = 65^\circ C, T_{pijpp} |_{x=0} = 65^\circ C \text{ en } T_{iso} |_{x=0} = 65^\circ C.$$

Verder, kunnen we aannemen dat aan het eind van de leiding (op  $x = L$ ) geldt:

$$\frac{dT_{pijpp}}{dx} |_{x=L} = 0 \text{ en } \frac{dT_{iso}}{dx} |_{x=L} = 0.$$

## 4.2 Analytische oplossing voor de niet-geïsoleerde leiding

We zullen nu het stelsel differentiaalvergelijkingen voor de niet-geïsoleerde leiding analytisch oplossen, met deze oplossing kunnen we in het vervolg de numerieke oplossingsmethode valideren. In §4.1.1 hebben we het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen voor de niet-geïsoleerde leiding afgeleid:

$$k_{pijp}(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} = 2u_{pijp \rightarrow omg} r_{uit} (T_{pijp} - T_{omg}) - 2u_{water \rightarrow pijp} r_{in} (T_{water} - T_{pijp});$$

$$C_{water} \dot{m} \frac{dT_{water}}{dx} + 2\pi u_{water \rightarrow pijp} r_{in} (T_{water} - T_{pijp}) = 0.$$

We vereenvoudigen deze vergelijkingen door constanten een ander symbool te geven:

$$a \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} - b T_{pijp} + c (T_{water} - T_{pijp}) = -b T_{omg}; \quad (17)$$

$$f \frac{dT_{water}}{dx} + g (T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (18)$$

Voor de betekenis van de nieuwe symbolen zie de symbolenlijst (Appendix A.2).

Dit is een inhomogeen lineair stelsel. De algemene oplossing hiervan bestaat uit de oplossing van het homogene stelsel en een particuliere oplossing van het inhomogene stelsel.

Een particuliere oplossing van dit stelsel is:

$$\begin{pmatrix} T_{pijp} \\ T_{water} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{omg} \\ T_{omg} \end{pmatrix}.$$

We bekijken nu het homogene stelsel van de vergelijkingen (17) en (18):

$$a \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} - b T_{pijp} + c (T_{water} - T_{pijp}) = 0; \quad (19)$$

$$f \frac{dT_{water}}{dx} + g (T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (20)$$

We zoeken nu oplossingen van de vorm:

$$\begin{pmatrix} T_{pijp} \\ T_{water} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} e^{\lambda x},$$

invullen in het homogene stelsel (19) en (20) geeft:

$$a\epsilon_1 \lambda^2 e^{\lambda x} - b\epsilon_1 e^{\lambda x} + c(\epsilon_2 e^{\lambda x} - \epsilon_1 e^{\lambda x}) = 0;$$

$$f\epsilon_2 \lambda e^{\lambda x} + g(\epsilon_2 e^{\lambda x} - \epsilon_1 e^{\lambda x}) = 0.$$

Na het delen door  $e^{\lambda x}$ , kunnen we dit ook schrijven als:

$$\begin{pmatrix} a\lambda^2 - b - c & c \\ -g & f\lambda + g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om de waarden van  $\lambda$  te kunnen bepalen, hebben we de determinant van de volgende matrix nodig:

$$\begin{pmatrix} a\lambda^2 - b - c & c \\ -g & f\lambda + g \end{pmatrix}.$$



De waarden van  $\lambda$  kunnen we vinden door de determinant gelijk te stellen aan nul, we krijgen dus de volgende derdegraadsvergelijking:

$$af\lambda^3 + ag\lambda^2 - f(b+c)\lambda - bg = 0. \quad (21)$$

Deze vergelijking lossen we op met behulp van het rekenprogramma Maple (zie Appendix D). Hierbij is gebruik gemaakt van de waarden vermeld in de waardenlijst (zie Appendix A.3). De bijbehorende eigenvectoren volgen uit de vergelijking:

$$-g\epsilon_1 + (f\lambda + g)\epsilon_2 = 0. \quad (22)$$

Dus de eigenvectoren zijn van de vorm:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\lambda + g \\ g \end{pmatrix}.$$

De homogene oplossing is dus te schrijven als:

$$\begin{pmatrix} T_{pijp} \\ T_{water} \end{pmatrix} = n_1 \begin{pmatrix} f\lambda_1 + g \\ g \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + n_2 \begin{pmatrix} f\lambda_2 + g \\ g \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + n_3 \begin{pmatrix} f\lambda_3 + g \\ g \end{pmatrix} e^{\lambda_3 x}. \quad (23)$$

De algemene oplossing van het stelsel (17) en (18) is dus:

$$T_{pijp} = n_1(f\lambda_1 + g)e^{\lambda_1 x} + n_2(f\lambda_2 + g)e^{\lambda_2 x} + n_3(f\lambda_3 + g)e^{\lambda_3 x} + T_{omg}; \quad (24)$$

$$T_{water} = n_1 g e^{\lambda_1 x} + n_2 g e^{\lambda_2 x} + n_3 g e^{\lambda_3 x} + T_{omg}. \quad (25)$$

De eigenwaarden  $\lambda$  hebben de waarden:

$$\lambda_1 = 177.3169138, \lambda_2 = -0.1030747312 \cdot 10^{-2} \text{ en } \lambda_3 = -178.2259043.$$

Door middel van de randvoorwaarden  $T_{water} |_{x=0} = 65$ ,  $T_{pijp} |_{x=0} = 65$  en  $\frac{dT_{pijp}}{dx} |_{x=L} = 0$ , kunnen we de waarden van de constanten  $n_1$ ,  $n_2$  en  $n_3$  bepalen, hiervoor vullen we de randvoorwaarden in in de functies (24) en (25).

We krijgen dus de volgende vereenvoudigde functievoorschriften voor  $T_{pijp}$  en  $T_{water}$ :

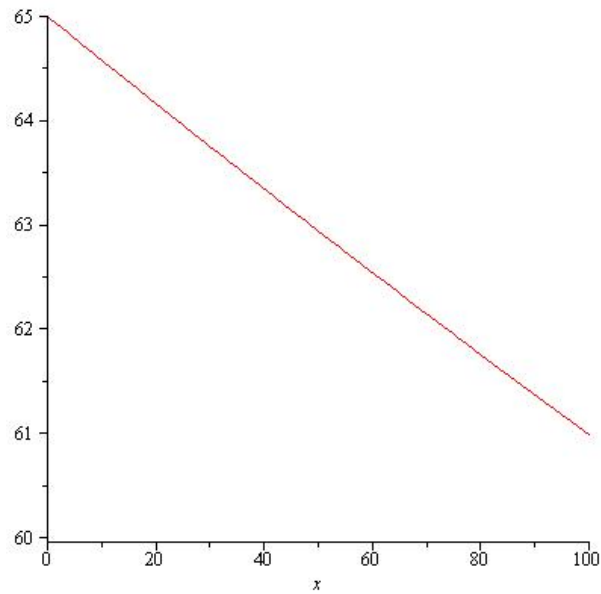
$$T_{pijp} = 40,954e^{-0,001x} + 0,046e^{-178,226x} + 24; \quad (26)$$

$$T_{water} = 41e^{-0,001x} - 0,237 \cdot 10^{-3} e^{-178,226x} + 24, \quad (27)$$

voor  $x \in [0, 100]$ .

Voor de volledige functievoorschriften zie Appendix D.

In Figuur 9 is het verloop van de watertemperatuur  $T_{water}$ , voor  $x \in [0, 100]$ , te zien. Hierbij nemen we aan dat de hele leiding horizontaal is opgesteld, de warmtedoorgangscoefficiënt  $h_l$  is nu dus constant (zie Appendix C).



Figuur 9: Analytische oplossing van  $T_{water}(x)$

### 4.3 Numerieke oplossing

#### 4.3.1 Niet-geïsoleerde circulatieleiding

Bij de numerieke oplossingmethode zullen we de vergelijkingen (17) en (18) discretiseren, hierbij benaderen we de tweede afgeleide door de centrale differentie te gebruiken en de eerste afgeleide door gebruik te maken van de achterwaartse differentie.

Voor de discretisatie delen we het interval  $[0, L]$  op in  $N$  deelintervallen met lengte  $\Delta x$ . Voor het stelsel (17) en (18) krijgen we de volgende vergelijkingen:

$$a\left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2}\right) - bu_j + c(v_j - u_j) = -bT_{omg}; \quad (28)$$

$$f\left(\frac{v_j - v_{j-1}}{\Delta x}\right) + g(v_j - u_j) = 0, \quad (29)$$

waarbij  $u_j$  de numerieke benadering is voor  $T_{pijp}$  en  $v_j$  de benadering is voor  $T_{water}$ , op  $x = j\Delta x$  met  $j = 0, \dots, N$ .

Uit de randvoorwaarden op  $x = 0$  volgt:  $u_0 = v_0 = 65$ . Voor de Neumann-randvoorwaarde op  $x = L$  kunnen de benadering gebruiken:

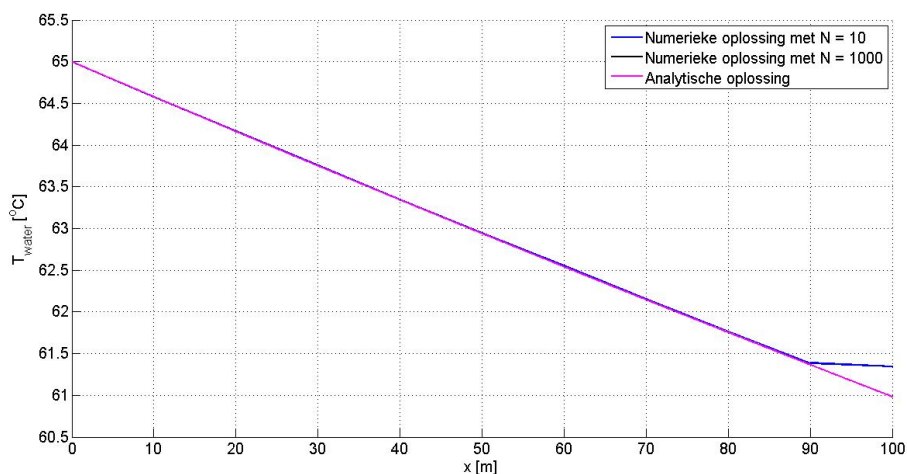
$$\frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x} = 0, \text{ waaruit volgt: } u_N = u_{N-1}.$$

Voor het differentieschema (28) en (29) met de bovengenoemde randvoorwaarden kunnen we de matrix-vector notatie  $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}$  gebruiken, dit staat hieronder uitgeschreven.

$$\begin{bmatrix}
 \frac{-2a}{\Delta x^2} - b.c & \frac{a}{\Delta x^2} & 0 & \dots & 0 & c & 0 & \dots & 0 \\
 \frac{a}{\Delta x^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \frac{-2a}{\Delta x^2} - b.c & \frac{a}{\Delta x^2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \frac{a}{\Delta x^2} & \frac{-a}{\Delta x^2} - b.c & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\
 -g & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f}{\Delta x} + g & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-f}{\Delta x} & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -g & 0 & 0 & \frac{-f}{\Delta x} & \frac{f}{\Delta x} + g & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 \vdots \\
 u_{N-1} \\
 v_1 \\
 \vdots \\
 v_N
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -bT_{omg} - \frac{a}{\Delta x^2} u_0 \\
 -bT_{omg} \\
 \vdots \\
 -bT_{omg} \\
 \frac{f}{\Delta x} v_0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Voor het oplossen van dit stelsel maken we gebruik van het rekenpakket Matlab. In Appendix E is het programma voor de niet-geïsoleerde leiding te zien.

In Figuur 10 zijn de analytische en numerieke oplossingen van  $T_{water}$  getekend, voor verschillende  $N$ -waarden en voor  $x \in [0, 100]$ , in het geval van een niet-geïsoleerde horizontale circulatieleiding:

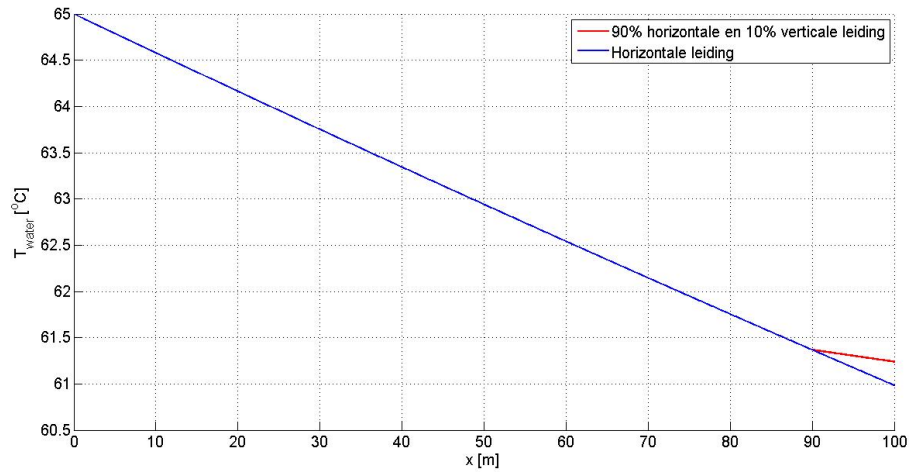


Figuur 10: Numerieke oplossing van  $T_{water}$  bij een niet-geïsoleerde horizontale circulatieleiding

We zien dat voor grote waarden van  $N$ , de numerieke oplossing overeenkomt met de analytische oplossing. De fouten in de numerieke methode zijn voor grote waarden van  $N$  blijkbaar te verwaarlozen en we kunnen met deze methode verder werken.

Als we nu aannemen dat we te maken hebben met een circulatieleiding die voor 90% horizontaal en 10% verticaal opgesteld is. Dan is de warmtedoorgangscoefficiënt  $h_l$  niet meer constant. Voor het verticale deel nemen we een lage waarde van  $h_l$ , bijvoorbeeld  $h_l = 5 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ , terwijl we voor het horizontale deel een hoge waarde van  $h_l$  nemen, bijvoorbeeld  $h_l = 15 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$  (zie Appendix C).

In Figuur 11 is het verloop van de watertemperatuur te zien, wanneer de eerste 90 m van de leiding horizontaal en de laatste 10 m verticaal is.



Figuur 11: Numerieke oplossing van  $T_{water}$  bij een niet-geïsoleerde circulatieleiding

We zien dat in het verticale deel van de leiding (het laatste gedeelte) de temperatuur van het water minder snel daalt dan in het horizontale deel. Dit komt omdat we hebben aangenomen dat de warmteoverdracht tussen de leiding en lucht minder is bij een verticale leiding dan bij een horizontale leiding.

### 4.3.2 Geïsoleerde circulatieleiding

We bekijken nu de geïsoleerde leiding, hierbij hoort het stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$k_{iso}(r_{iso}^2 - r_{uit}^2) \frac{d^2 T_{iso}}{dx^2} = 2u_{iso \rightarrow omg} r_{iso} (T_{iso} - T_{omg}) - 2u_{pijp \rightarrow iso} r_{uit} (T_{pijp} - T_{iso}); \quad (30)$$

$$k_{pijp}(r_{uit}^2 - r_{in}^2) \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} = 2u_{pijp \rightarrow iso} r_{uit} (T_{pijp} - T_{iso}) - 2u_{water \rightarrow pijp} r_{in} (T_{water} - T_{pijp}); \quad (31)$$

$$C_{water} \dot{m} \frac{dT_{water}}{dx} + 2\pi u_{water \rightarrow pijp} r_{in} (T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (32)$$

We kunnen dit stelsel herschrijven tot:

$$p \frac{d^2 T_{iso}}{dx^2} = s(T_{iso} - T_{omg}) - m(T_{pijp} - T_{iso}); \quad (33)$$

$$a \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} = m(T_{pijp} - T_{iso}) - c(T_{water} - T_{pijp}); \quad (34)$$

$$f \frac{dT_{water}}{dx} + g(T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (35)$$

De numerieke aanpak bij het berekenen van het temperatuurverloop voor de geïsoleerde leiding is analoog aan de aanpak bij de niet-geïsoleerde leiding waarbij we (33), (34) en (35) gaan discretiseren. We krijgen dus het volgende differentieschema:

$$p \left( \frac{i_{j-1} - 2i_j + i_{j+1}}{\Delta x^2} \right) - si_j + m(u_j - i_j) = -sT_{omg}; \quad (36)$$

$$a \left( \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} \right) - m(u_j - i_j) + c(v_j - u_j) = 0; \quad (37)$$

$$f \left( \frac{v_j - v_{j-1}}{\Delta x} \right) + g(v_j - u_j) = 0. \quad (38)$$

Hierbij zijn  $u_j$  en  $v_j$  nog steeds de numerieke benaderingen voor resp.  $T_{pijp}$  en  $T_{water}$  en  $i_j$  is de benadering voor  $T_{iso}$ , op  $x = j\Delta x$  met  $j = 0, \dots, N$ .

De randvoorwaarden voor de geïsoleerde circulatieleiding worden gegeven door:

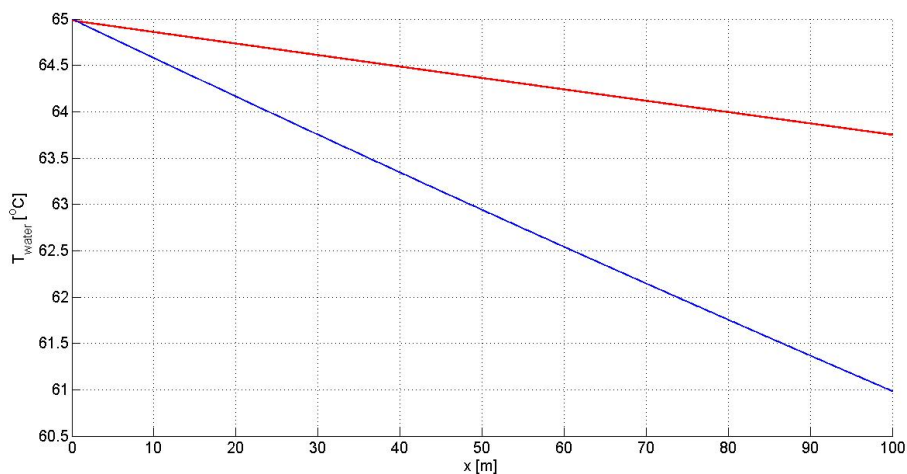
$$i_0 = u_0 = v_0 = 65, i_N = i_{N-1} \text{ en } u_N = u_{N-1}.$$

We kunnen hier ook de matrix-vector notatie toepassen, en het differentieschema met de bijbehorende randvoorwaarden schrijven als  $\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{r}$ . Dit stelsel is uitgeschreven op blz. 22.

Ook dit wordt opgelost met het rekenpakket Matlab. In Appendix F is het programma voor de geïsoleerde leiding te zien.

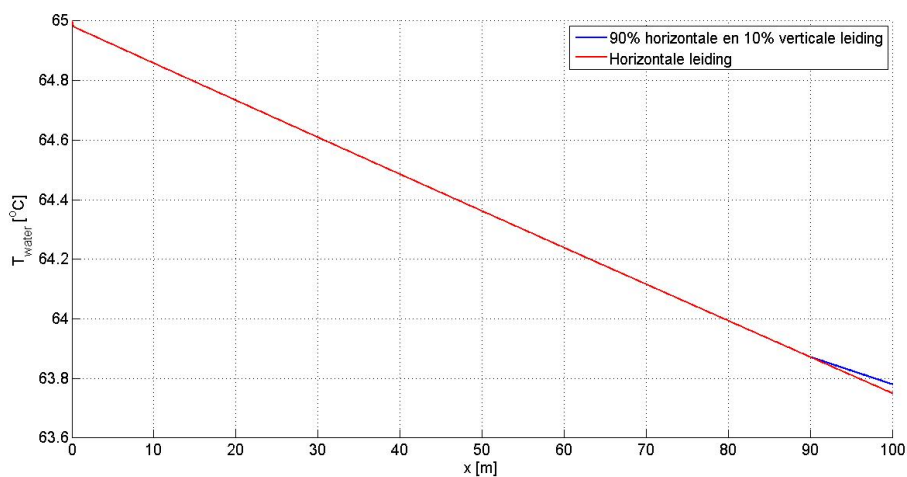


In Figuur 12 zien we het verloop van de watertemperatuur bij de niet-geïsoleerde (blauw) en de geïsoleerde horizontale circulatieleiding (rood).



Figuur 12: Numerieke oplossingen van  $T_{water}$  bij de horizontale circulatieleiding

Als we nu aannemen dat we te maken hebben met een circulatieleiding die voor 90% horizontaal en 10% verticaal opgesteld is, dan krijgen we het verloop van de watertemperatuur te zien in Figuur 13, wanneer de eerste 90 m van de leiding horizontaal en de laatste 10 m verticaal is.



Figuur 13: Numerieke oplossing van  $T_{water}$  bij een geïsoleerde circulatieleiding



#### 4.4 Berekening van het energieverbruik en de kosten

Voordat we de energiekosten kunnen berekenen moeten we eerst weten wat het energieverbruik is. Dit is te berekenen met de volgende formule, waarin  $Q$  het energieverbruik is per seconde:

$$Q = \dot{m}C_{water}\Delta T, \quad (39)$$

waarbij  $\Delta T$  het verschil is tussen de watertemperatuur aan het begin (op  $x = 0$ ) en aan het eind van de leiding (op  $x = L$ ).

In §4.3 hebben we gezien dat voor de niet-geïsoleerde leiding geldt  $\Delta T = 3,7603 \text{ }^\circ\text{C}$ . Voor de geïsoleerde leiding geldt  $\Delta T = 1,2196 \text{ }^\circ\text{C}$ . We nemen hierbij de 90% horizontale en 10% verticale leiding in beschouwing.

Dus geldt voor het energieverbruik  $E$  per jaar:

$$\begin{aligned} \text{Niet-geïsoleerde leiding: } E &= Q \cdot (3600 \cdot 24 \cdot 365) \approx 1,191 \cdot 10^{11} \text{ J}; \\ \text{Geïsoleerde leiding: } E &= Q \cdot (3600 \cdot 24 \cdot 365) \approx 3,864 \cdot 10^{10} \text{ J}. \end{aligned}$$

We weten dat de verbrandingswarmte van aardgas gelijk is aan  $32 \cdot 10^6 \text{ J/m}^3$ , en aardgas kost 0,72 euro per  $\text{m}^3$ .

We kunnen nu dus de kosten voor aardgas per jaar berekenen:

$$\begin{aligned} \text{Niet-geïsoleerde leiding: } K &= \frac{E}{32 \cdot 10^6} \cdot 0,72 \approx 2.680,54 \text{ euro}; \\ \text{Geïsoleerde leiding: } K &= \frac{E}{32 \cdot 10^6} \cdot 0,72 \approx 869,39 \text{ euro}. \end{aligned}$$

Als we de isolatiekosten hebben terugbetaald, dan besparen we 1.811,15 euro per jaar door te isoleren. We zullen nu bepalen na hoeveel tijd  $R$  in jaren het rendabel zou zijn om isolatie aan te brengen. Dit doen we met behulp van de volgende formule:

$$R = \frac{\text{isolatiekosten}}{K_{ng} - K_g}, \quad (40)$$

waarbij  $K_{ng}$  en  $K_g$  de aardgaskosten voor respectievelijk de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde leiding zijn. De isolatiekosten berekenen we door de prijs van het isolatiemateriaal per meter te vermenigvuldigen met de lengte van de leiding  $L$ .

Met behulp van formule (40) krijgen we de volgende resultaten voor het aantal jaren  $R$  waarna het rendabel is om isolatie aan te brengen, zie Tabel 1.

	Prijs van het isolatiemateriaal	$R$ in jaren
Isolatiemateriaal met zichtwerk	10 euro	0,552 ( $\approx 6,6$ mndn)
Isolatiemateriaal zonder zichtwerk	7 euro	0,386 ( $\approx 4,6$ mndn)

Tabel 1: Aantal jaren  $R$  waarna het rendabel is om isolatie aan te brengen

Dus als we isolatie aanbrengen met zichtwerk, dan zouden we in ongeveer 7 maanden het isolatiemateriaal hebben terugbetaald, en beginnen we daarna energie en dus geld te besparen door te isoleren.

## 4.5 Parametervariatie

In Appendix C hebben we gezien dat de warmtedoorgangscoefficiënt  $h$  van water en lucht in een experimenteel te bepalen interval ligt.

In de vorige paragrafen hebben we voor water in een gedwongen stroming  $h$  gelijk aan 15.000 gesteld, terwijl we voor lucht  $h$  gelijk aan 5 in een verticale leiding en  $h$  gelijk aan 15 in een horizontale leiding hebben genomen.

Omdat de werkelijke waarde van deze coëfficiënten kan afwijken van de door ons gekozen waarden, zullen we nu onderzoeken wat de invloed is van de variatie van deze waarden.

We gaan de waarden van  $h$  voor water en lucht variëren en we vergelijken de berekende aardgaskosten. Hierbij beschouwen we een 90% horizontale en 10% verticale leiding.

We beginnen met het variëren van  $h_w$  de warmtedoorgangscoefficiënt van water, en we krijgen de resultaten te zien in Tabel 2 voor de kosten van het verbruikte aardgas.

	$h_w = 7.500$	$h_w = 15.000$	$h_w = 30.000$
Niet-geïsoleerde leiding	2.677,83 euro	2.680,54 euro	2.681,89 euro
Geïsoleerde leiding	869,11 euro	869,39 euro	869,54 euro

Tabel 2: De aardgaskosten bij variatie van de warmtedoorgangscoefficiënt van water  $h_w$

We zullen nu de warmtedoorgangscoefficiënt van lucht  $h_l$  variëren, hierbij moeten we de coëfficiënt voor het horizontale deel  $h_l^h$  en de coëfficiënt voor het verticale deel  $h_l^v$  variëren. We krijgen de resultaten voor de aardgaskosten, te zien in Tabel 3.

	$h_l^h = 7$ en $h_l^v = 2$	$h_l^h = 15$ en $h_l^v = 5$	$h_l^h = 30$ en $h_l^v = 10$
Niet-geïsoleerde leiding	1.277,43 euro	2.680,54 euro	5.109,80 euro
Geïsoleerde leiding	723,55 euro	869,39 euro	953,08 euro

Tabel 3: De aardgaskosten bij variatie van de warmtedoorgangscoefficiënt van lucht  $h_l$

We zien dus dat het variëren van de warmtedoorgangscoefficiënt van water weinig invloed heeft op de eindresultaten, terwijl het variëren van de warmtedoorgangscoefficiënt van lucht veel invloed kan hebben op de resultaten, vooral in de niet-geïsoleerde leiding.

## 4.6 Evaluatie van de resultaten

### Verschil tussen de analytische en de numerieke methode:

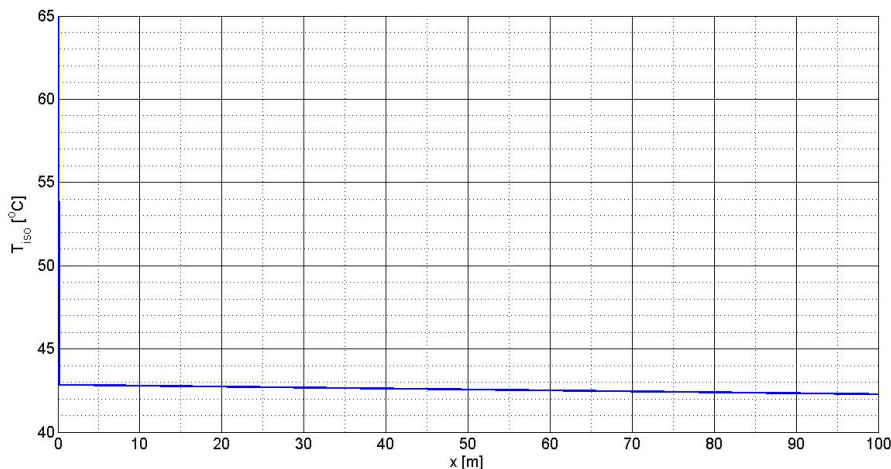
Bij het vergelijken van de analytische en de numerieke methode in §4.3.1 hebben we gezien dat voor kleine waarden van  $\Delta x$  de numerieke benadering overeenkomt met de analytische oplossing. Daarom hebben we in het vervolg het stelsel voor de geïsoleerde circulatieleiding opgelost met behulp van de numerieke methode, gebruikmakend van kleine waarden voor  $\Delta x$ .

### Verschil tussen de geïsoleerde en de niet-geïsoleerde leiding:

In Figuur 12 zien we dat de watertemperatuur in de geïsoleerde leiding veel minder daalt dan de watertemperatuur in de niet-geïsoleerde leiding. We besparen dus wel degelijk energie door te isoleren.

### Het temperatuurverloop in de isolatielaag:

Voor de geïsoleerde horizontale leiding zien we in Figuur 14 het temperatuurverloop in de isolatielaag.



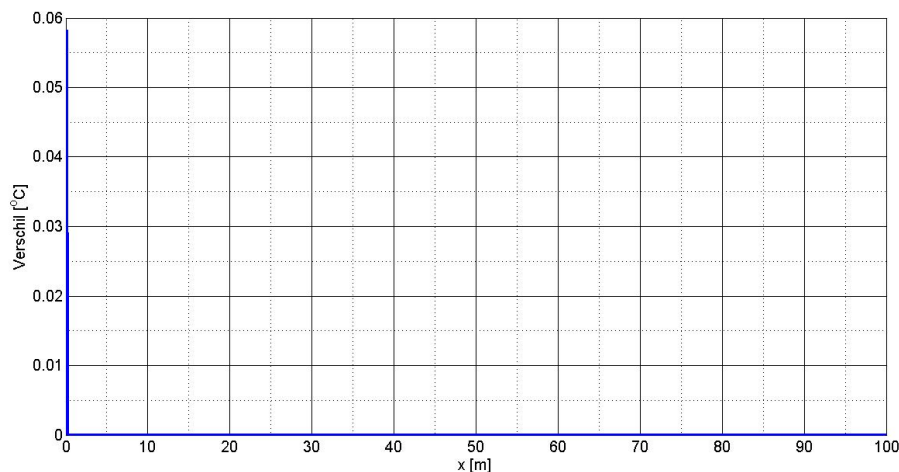
Figuur 14: Numerieke oplossing van  $T_{iso}$  bij de horizontale circulatieleiding

Voor  $T_{iso}$  hebben we de vergelijking:

$$p \frac{d^2 T_{iso}}{dx^2} = s(T_{iso} - T_{omg}) - m(T_{pijp} - T_{iso}). \quad (41)$$

We weten dat in de isolatielaag de warmtegeleidingscoëfficiënt  $k_{iso}$  erg klein is. De term  $p$  die gelijk is aan  $k_{iso}(r_{iso}^2 - r_{uit}^2)$  is hierdoor verwaarloosbaar klein, en kunnen we dus op nul stellen.

In Figuur 15 is de verschilfunctie van  $T_{iso}$  getekend. Waarbij we het verschil nemen tussen het temperatuurverloop in de isolatielaag met  $p$  gelijk aan nul en het temperatuurverloop met  $p$  gelijk aan  $k_{iso}(r_{iso}^2 - r_{uit}^2)$ .



Figuur 15: Numerieke oplossing van  $T_{iso}$

We zien in Figuur 15 dat de verschilfunctie vrijwel nul is voor  $x \in [0, 100]$ . We kunnen dus vergelijking (41) vereenvoudigen door  $p$  gelijk aan nul te stellen, en we krijgen:

$$T_{iso} = \frac{mT_{pijp} + sT_{omg}}{m + s}.$$

Deze vergelijking kunnen we invullen in vergelijking (34), na vereenvoudiging krijgen we dan:

$$a \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} = \left(m - \frac{m^2}{m + s}\right) T_{pijp} - \frac{ms}{m + s} T_{omg} - c(T_{water} - T_{pijp}). \quad (42)$$

Zo krijgen we een stelsel voor de geïsoleerde leiding bestaande uit twee differentiaalvergelijkingen (35) en (42).

In het vervolg van het verslag zullen we dit stelsel gebruiken voor de geïsoleerde leiding.

## 5 Warmtapwaterleiding (Stationair probleem)

In het geval van een gesloten watertappunt hebben we te maken met stilstaand water. In het water vindt dan warmtetransport plaats door warmteconductie in plaats van convectief warmtetransport bij stromend water.

Verder nemen we aan dat het water al een tijd stilstaat, waardoor de temperatuur niet meer in de tijd verandert. En omdat de binnenstraal  $r_{in}$  van deze leiding klein is, kunnen we hiervoor aannemen dat de temperatuur  $T$  van het water onafhankelijk is van de radiale afstand tot de  $x$ -as. We hebben dus te maken met een stationair probleem, waarbij de temperatuur in alle media alleen afhangt van de positie  $x$ .

De warmtapwaterleiding is een aftakking, van de circulatieleiding, naar een warmwatertappunt (zie Figuur 1). De temperatuur op  $x = 0$ ,  $T_{begin}$ , is nu dus de temperatuur van het water in het verbindingspunt van de aftakking met de circulatieleiding.

### 5.1 Warmtebalans

#### 5.1.1 Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding

Evenals in het geval van een circulatieleiding, stellen we de balansvergelijkingen samen volgens het principe: de hoeveelheid warmte die een laag instroomt is gelijk aan de hoeveelheid warmte die uitstroomt. Gebruikmakend van Figuur 7 komen we tot de volgende twee vergelijkingen voor de leidingwand en voor het water respectievelijk:

$$q_2 + q_6 = q_5 + q_8; \quad (43)$$

$$q_3 = q_6 + q_9. \quad (44)$$

De warmtestromen  $q_2$ ,  $q_5$ ,  $q_6$  en  $q_8$  zijn in dit geval gelijk aan de warmtestromen die we hebben bepaald in §4.1.1, dus de formules (6), (7), (8) en (9) gelden nu nog steeds.  $q_3$  en  $q_9$  kunnen we berekenen met formule (1), dus geldt:

$$q_3 = -k_{water} A_1 \frac{dT_{water}}{dx}; \quad (45)$$

$$q_9 = -k_{water} A_1 \frac{dT_{water}}{dx} \Big|_{x+\Delta x} = -k_{water} A_1 \left( \frac{dT_{water}}{dx} + \frac{d^2 T_{water}}{dx^2} \Delta x \right). \quad (46)$$

De temperatuur in de leidingwand kunnen we dus berekenen met behulp van de tweede orde differentiaalvergelijking (12), voor de temperatuur in het water geldt na vereenvoudiging de volgende tweede orde differentiaalvergelijking:

$$-k_{water} r_{in} \frac{d^2 T_{water}}{dx^2} + 2u_{water \rightarrow pijp} (T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (47)$$

We hebben nu een stelsel differentiaalvergelijkingen (12) en (47) voor de niet-geïsoleerde leiding gekregen. Om dit stelsel te kunnen oplossen hebben we vier randvoorwaarden nodig.

We nemen aan dat de leiding op  $x = L$  blootstaat aan de lucht, de temperatuur op  $x = L$  is dus gelijk aan de omgevingstemperatuur  $T_{omg}$ . De temperatuur van het water en van de leidingwand aan het begin en aan het eind van de leiding (op  $x = 0$  en op  $x = L$ ) zijn dus bekend:

$$T_{water} |_{x=0} = T_{begin} \text{ en } T_{pijp} |_{x=0} = T_{begin};$$

$$T_{water} |_{x=L} = T_{omg} \text{ en } T_{pijp} |_{x=L} = T_{omg},$$

waarbij we voor  $T_{begin}$  drie gevallen zullen onderscheiden: de aftakking bevindt zich aan het begin, halverwege of aan het eind van de circulatieleiding. Omdat er in de geïsoleerde circulatieleiding geen groot verschil is tussen de temperatuur aan het begin en de temperatuur aan het eind van de leiding, nemen we hier de waarden aan van de temperatuur in de niet-geïsoleerde circulatieleiding.

### 5.1.2 Geïsoleerde warmtapwaterleiding

We beschouwen nu een stukje geïsoleerde leiding ter lengte  $\Delta x$  zoals getekend in Figuur 7. De bijbehorende warmtebalansen zijn (43), (44) en:

$$q_1 + q_5 = q_4 + q_7. \quad (48)$$

We hebben nu dezelfde warmtebalansen in de leidingwand en in de isolatielaag als in het geval van een geïsoleerde circulatieleiding, voor de watertemperatuur geldt nog steeds vergelijking (47). We hebben dus een stelsel differentiaalvergelijkingen bestaande uit de tweede orde differentiaalvergelijkingen (15), (16) en (47). Hiervoor zijn zes randvoorwaarden nodig.

Wij nemen aan dat de temperatuur van het water, de leidingwand en de isolatielaag aan het begin en aan het eind van de leiding (op  $x = 0$  en op  $x = L$ ) bekend zijn:

$$T_{water} |_{x=0} = T_{begin}, T_{pijp} |_{x=0} = T_{begin} \text{ en } T_{iso} |_{x=0} = T_{begin};$$

$$T_{water} |_{x=L} = T_{omg}, T_{pijp} |_{x=L} = T_{omg} \text{ en } T_{iso} |_{x=L} = T_{omg},$$

ook hier onderscheiden we voor  $T_{begin}$  de gevallen: de aftakking bevindt zich aan het begin, halverwege of aan het eind van de circulatieleiding.

We kunnen nu de stelsels vergelijkingen voor de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde warmtapwaterleiding numeriek oplossen, hiervoor gebruiken we dezelfde oplossingsmethode als gebruikt voor het oplossen van de circulatieleidingprobleem.

## 5.2 Numerieke oplossing

### 5.2.1 Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding

Bij de numerieke oplossingmethode zullen we de vergelijkingen (12) en (47) discretiseren, hierbij benaderen we de tweede afgeleide door de centrale differentie te gebruiken.

Voor de discretisatie delen we het interval  $[0, L]$  op in  $N$  deelintervallen met lengte  $\Delta x$ . Voor het stelsel (12) en (47) krijgen we na vereenvoudiging de volgende vergelijkingen:

$$a\left(\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2}\right) - bu_j + c(v_j - u_j) = -bT_{omg}; \quad (49)$$

$$-d\left(\frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{\Delta x^2}\right) + l(v_j - u_j) = 0; \quad (50)$$

waarbij  $u_j$  de numerieke benadering is voor  $T_{pijp}$  en  $v_j$  de benadering is voor  $T_{water}$ , op  $x = j\Delta x$  met  $j = 0, \dots, N$ .

Voor de betekenis van de nieuwe symbolen zie de symbolenlijst (A.2).

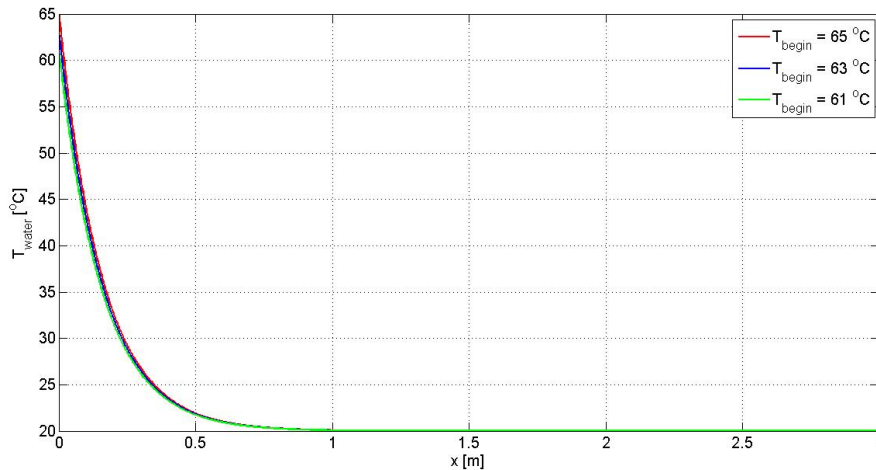
Uit de randvoorwaarden op  $x = 0$  volgt:  $u_0 = v_0 = T_{begin}$ . En op  $x = L$  geldt:

$$u_N = v_N = T_{omg}.$$

Voor het differentieschema (49) en (50) met de bovengenoemde randvoorwaarden kunnen we de matrix-vector notatie  $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{b}$  gebruiken.

Voor het oplossen van dit stelsel maken we gebruik van het rekenpakket Matlab. In Appendix G is het programma voor de niet-geïsoleerde leiding te zien. We beschouwen hierbij een horizontale warmtapwaterleiding die 3 m lang is.

In Figuur 16 is de numerieke oplossing van  $T_{water}$  getekend, voor verschillende waarden van  $T_{begin}$  en voor  $x \in [0, 3]$ , in het geval van een niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding.



Figuur 16: Numerieke oplossing van  $T_{water}$  bij een niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding

### 5.2.2 Geïsoleerde warmtapwaterleiding

We bekijken nu de geïsoleerde leiding, hierbij hoort het vereenvoudigde stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$p \frac{d^2 T_{iso}}{dx^2} = s(T_{iso} - T_{omg}) - m(T_{pijp} - T_{iso}); \quad (51)$$

$$a \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} = m(T_{pijp} - T_{iso}) - c(T_{water} - T_{pijp}); \quad (52)$$

$$-d \frac{d^2 T_{water}}{dx^2} + l(T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (53)$$

In §4.6 hebben we gezien dat we de term  $p$  op nul kunnen stellen, we krijgen dus het volgende vereenvoudigde stelsel door vergelijking (51) in te vullen in vergelijking (52) met  $p$  gelijk aan nul:

$$a \frac{d^2 T_{pijp}}{dx^2} - \left(m - \frac{m^2}{m+s}\right) T_{pijp} + c(T_{water} - T_{pijp}) = -\frac{ms}{m+s} T_{omg}; \quad (54)$$

$$-d \frac{d^2 T_{water}}{dx^2} + l(T_{water} - T_{pijp}) = 0. \quad (55)$$

De numerieke aanpak bij het berekenen van het temperatuurverloop voor de geïsoleerde leiding is analoog aan de aanpak bij de niet-geïsoleerde leiding waarbij we (54) en (55) gaan discretiseren. We krijgen dus het volgende differentieschema:

$$a \left( \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} \right) - \left(m - \frac{m^2}{m+s}\right) u_j + c(v_j - u_j) = -\frac{ms}{m+s} T_{omg}; \quad (56)$$

$$-d \left( \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{\Delta x^2} \right) + l(v_j - u_j) = 0. \quad (57)$$

Hierbij zijn  $u_j$  en  $v_j$  de numerieke benaderingen voor resp.  $T_{pijp}$  en  $T_{water}$  op  $x = j\Delta x$  met  $j = 0, \dots, N$ .

De randvoorwaarden voor de geïsoleerde warmtapwaterleiding worden gegeven door:

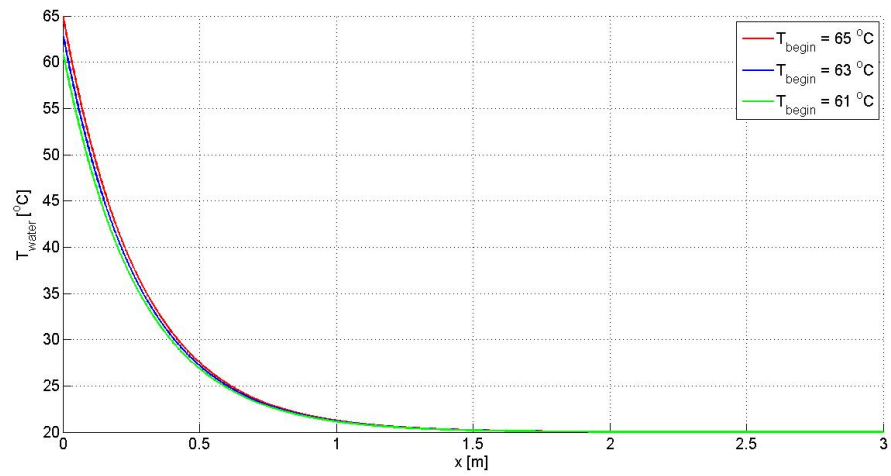
$$u_0 = v_0 = T_{begin} \text{ en } u_N = v_N = T_{omg}.$$

We kunnen hier ook de matrix-vector notatie toepassen, en het differentieschema met de bijbehorende randvoorwaarden schrijven als  $\mathbf{B}\mathbf{w} = \mathbf{r}$ .

Dit wordt opgelost met het rekenpakket Matlab. In Appendix H is het programma voor de geïsoleerde leiding te zien.



In Figuur 17 zien we het verloop van de watertemperatuur bij de geïsoleerde gesloten warmtapwaterleiding.



Figuur 17: Numerieke oplossingen van  $T_{water}$  bij de geïsoleerde warmtapwaterleiding

### 5.3 Legionella-wetgeving

Bij de warmtapwaterleiding moeten we voldoen aan de Legionella-wetgeving. De Legionellabacterie blijkt onder bepaalde gunstige omstandigheden sterk in aantal toe te nemen. Optimale groeiomstandigheden zijn stilstaand water met een temperatuur tussen 25 en 55 graden Celsius (optimaal is 37 °C).

Om te bepalen of we de warmtapwaterleiding wel of niet gaan isoleren, zullen we, voor de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde leiding, de lengte van de buis  $L_{leg}$  gaan bepalen waarin zich water bevindt met temperatuur tussen 25 en 55 graden Celsius, dus met water waarvoor geldt  $25 \leq T_{water} \leq 55$ . De leiding met de kortste lengte  $L_{leg}$  voldoet het best aan de Legionella-wetgeving.

In Tabel 4 zijn de waarden van  $L_{leg}$  te zien voor verschillende waarden van  $T_{begin}$ .

	$T_{begin}$	$L_{leg}$
Niet-geïsoleerde leiding:	65 °C	30,6 cm
	63 °C	30,6 cm
	61 °C	30,6 cm
Geïsoleerde leiding:	65 °C	54,0 cm
	63 °C	54,2 cm
	61 °C	54,0 cm

Tabel 4: De lengte van de buis met watertemperatuur tussen 25 °C en 55 °C

We zien dat de leiding waarin zich water bevindt met temperatuur tussen 25 en 55 graden Celsius veel korter is, voor alle waarden van  $T_{begin}$ , bij de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding. De niet-geïsoleerde leiding voldoet dus het beste aan de Legionella-wetgeving. Het advies uit het oogpunt van de bestrijding van de legionellabacterie is dientengevolge om de warmtapwaterleiding niet te isoleren.

## 6 Warmteoverdracht tussen de circulatie- en de warmtapwaterleiding

In Figuur 1 is te zien dat de circulatie- en de warmtapwaterleiding met elkaar verbonden zijn. Er vindt dus warmtetransport plaats tussen beide leidingen, en we gaan nu onderzoeken hoe groot deze warmtestroom is.

Als dit warmtetransport groot is, dan heeft de hoeveelheid energie die hierbij wordt overgedragen zeker invloed op onze resultaten en conclusies.

Het verloop van de temperatuur in de circulatieleiding is stationair. We hebben dus te maken met een stationair probleem waarbij de temperatuur in het verbindingspunt niet afhangt van de tijd.

Aan het begin van de warmtapwaterleiding (op  $x = 0$ ) vindt warmteconductie plaats tussen de circulatie- en de warmtapwaterleiding. We kunnen dus formule (1) gebruiken om de warmtestroom per seconde in het verbindingspunt te bepalen.

In het geval van een niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding, geldt voor de warmtestroom per seconde:

$$q = -k_{water}A_1 \frac{dT_{water}}{dx} \Big|_{x=0} - k_{pijp}A_2 \frac{dT_{pijp}}{dx} \Big|_{x=0} . \quad (58)$$

In de geïsoleerde warmtapwaterleiding geldt voor de warmtestroom per seconde:

$$q = -k_{water}A_1 \frac{dT_{water}}{dx} \Big|_{x=0} - k_{pijp}A_2 \frac{dT_{pijp}}{dx} \Big|_{x=0} - k_{iso}A_3 \frac{dT_{iso}}{dx} \Big|_{x=0} . \quad (59)$$

De temperatuur op  $x = 0$  is de temperatuur in het verbindingspunt tussen de circulatieleiding en de warmtapwaterleiding,  $T_{begin}$ , we kunnen nu de verandering in de temperatuur op  $x = 0$  benaderen door:

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \approx \frac{T(\Delta x) - T_{begin}}{\Delta x},$$

voor kleine waarden van  $\Delta x$ .

In de Tabel 5 zijn de resultaten voor verschillende waarden van  $T_{begin}$  opgenomen.

	$T_{begin}$	$q$	Aardgaskosten per jaar
Niet-geïsoleerde leiding:	65 °C	5,004 J/s	3,70 euro
	63 °C	4,782 J/s	3,53 euro
	61 °C	4,559 J/s	3,24 euro
Geïsoleerde leiding:	65 °C	5,111 J/s	3,63 euro
	63 °C	4,884 J/s	3,47 euro
	61 °C	4,657 J/s	3,30 euro

Tabel 5: Warmtestroom en aardgaskosten bij de warmteoverdracht tussen de circulatie- en warmtapwaterleiding

Zie voor de berekening van de aardgaskosten §4.4.

We zien dat de kosten bij deze warmtetransport tussen de circulatie- en de warmtapwaterleiding verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de kosten gemaakt door energieverbruik bij de circulatieleiding (zie §4.4).

## 7 Warmtapwaterleiding (Instationair probleem)

Als we het watertappunt sluiten nadat het een tijdje heeft open gestaan, dan zal het evenwicht (besproken in §5) zich niet gelijk instellen.

We zullen nu onderzoeken wat er gebeurt in de tijd vóór dat er een evenwicht zich instelt.

We hebben nu te maken met een instationair probleem, de temperatuur hangt dus van de positie  $x$  en de tijd  $t$ . Waarbij we aannemen dat, op het moment waarop we het watertappunt dicht doen (op  $t = 0$ ), de temperatuur in de hele warmtapwaterleiding gelijk is aan de temperatuur in het verbindingspunt met de circulatieleiding.

### 7.1 Differentiaalvergelijkingen

#### 7.1.1 Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding

Bij een instationair probleem hebben we niet meer te maken met het principe: de hoeveelheid warmte die een laag instroomt is gelijk aan de hoeveelheid warmte die uitstroomt.

De temperatuur hangt nu af van  $x$  en de tijd  $t$ . Het energieverbruik op tijdstip  $t + \Delta t$  is nu gelijk aan het energieverbruik op tijdstip  $t$  met daarbij opgeteld de ingestroomde warmte in  $\Delta t$  seconden en waarvan we de uitgestroomde warmte in  $\Delta t$  seconden aftrekken.

Laat  $C_y$  de soortelijke warmte en  $T_y$  de temperatuur zijn van materiaal  $y$ , dan is het energieverbruik op tijdstip  $t$  gelijk aan:

$$Q(x, t) = C_y \rho_y V_y T_y(x, t), \quad (60)$$

waarbij  $V_y$  het volume en  $\rho_y$  de dichtheid van materiaal  $y$  zijn.

Met behulp van Figuur 7 en formule (60) krijgen we de volgende vergelijkingen voor de niet geïsoleerde leiding.

Voor de leidingwand geldt:

$$C_{pijpp} \rho_{pijpp} A_2 \Delta x T_{pijpp}(x, t + \Delta t) = C_{pijpp} \rho_{pijpp} A_2 \Delta x T_{pijpp}(x, t) - k_{pijpp} A_2 \frac{\partial T_{pijpp}}{\partial x}(x, t) \Delta t + \quad (61)$$

$$+ u_{water \rightarrow pijp} A_4 (T_{water} - T_{pijpp}) \Delta t + k_{pijpp} A_2 \frac{\partial T_{pijpp}}{\partial x}(x + \Delta x, t) \Delta t - u_{pijpp \rightarrow omg} A_5 (T_{pijpp} - T_{omg}) \Delta t.$$

Voor water geldt:

$$C_{water} \rho_{water} A_1 \Delta x T_{water}(x, t + \Delta t) = C_{water} \rho_{water} A_1 \Delta x T_{water}(x, t) - k_{water} A_1 \frac{\partial T_{water}}{\partial x}(x, t) \Delta t - \quad (62)$$

$$- u_{water \rightarrow pijp} A_4 (T_{water} - T_{pijpp}) \Delta t + k_{water} A_1 \frac{\partial T_{water}}{\partial x}(x + \Delta x, t) \Delta t.$$

Dit stelsel vergelijkingen (61) en (62) kunnen we vereenvoudigen naar het volgende stelsel:

$$n \frac{\partial T_{pijpp}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_{pijpp}}{\partial x^2} + c(T_{water} - T_{pijpp}) - b(T_{pijpp} - T_{omg}); \quad (63)$$

$$z \frac{\partial T_{water}}{\partial t} = d \frac{\partial^2 T_{water}}{\partial x^2} - l(T_{water} - T_{pijpp}). \quad (64)$$

Voor de betekenis van de nieuwe symbolen zie de symbolenlijst (A.2).

We hebben nu een stelsel differentiaalvergelijkingen (63) en (64) voor de niet-geïsoleerde leiding gekregen. Om dit stelsel te kunnen oplossen hebben we twee beginvoorwaarden en vier randvoorwaarden nodig.

De temperatuur aan het begin van de leiding is de temperatuur in het verbindingspunt met de circulatieleiding, dus geldt op  $x = 0$ :

$$T_{pijp}(0, t) = T_{begin} \text{ en } T_{water}(0, t) = T_{begin}.$$

We nemen ook aan dat op  $t = 0$ , het moment waarop het watertappunt dicht gaat, de temperatuur in de leiding overal gelijk is aan de temperatuur op  $x = 0$ ,  $T_{begin}$ , dus geldt voor de beginvoorwaarden:

$$T_{pijp}(x, 0) = T_{begin} \text{ en } T_{water}(x, 0) = T_{begin}.$$

Verder weten we dat op  $x = L$  de temperatuur van de leiding aan het begin (op  $t = 0$ ) gelijk is aan  $T_{begin}$ , als een evenwicht zich heeft ingesteld dan is de temperatuur op  $x = L$  gelijk aan  $T_{omg}$ . In de tussentijd kunnen we niet precies bepalen wat er met de temperatuur gebeurt.

We veronderstellen nu dat de leiding een lengte  $H$  heeft, met  $H$  veel groter dan  $L$ , en we kiezen een randvoorwaarde op  $x = H$ , bijvoorbeeld:

$$T_{pijp}(H, t) = T_{omg} \text{ en } T_{water}(H, t) = T_{omg},$$

voor  $t > 0$ . Als we dan alleen de eerste  $L$  meters bekijken, dan zal deze keuze voor de randvoorwaarde, voor  $H$  groot genoeg, weinig invloed hebben op het temperatuurverloop op  $x = L$ .

### 7.1.2 Geïsoleerde warmtapwaterleiding

We beschouwen nu een stukje geïsoleerde leiding ter lengte  $\Delta x$  zoals getekend in Figuur 7.

Voor water hebben we nog steeds te maken met de differentiaalvergelijking (64), bij de leidingwand hoort de vereenvoudigde vergelijking:

$$n \frac{\partial T_{pijp}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_{pijp}}{\partial x^2} + c(T_{water} - T_{pijp}) - m(T_{pijp} - T_{iso}). \quad (65)$$

En voor de isolatielaag hebben we de vereenvoudigde vergelijking:

$$y \frac{\partial T_{iso}}{\partial t} = p \frac{\partial^2 T_{iso}}{\partial x^2} + m(T_{pijp} - T_{iso}) - s(T_{iso} - T_{omg}). \quad (66)$$

Voor de betekenis van de nieuwe symbolen zie de symbolenlijst (A.2).

We hebben nu een stelsel differentiaalvergelijkingen (64), (65) en (66) voor de geïsoleerde leiding gekregen. Om dit stelsel te kunnen oplossen hebben we drie beginvoorwaarden en zes randvoorwaarden nodig.

De beginvoorwaarden zijn:

$$T_{iso}(x, 0) = T_{begin}, T_{pijp}(x, 0) = T_{begin} \text{ en } T_{water}(x, 0) = T_{begin}.$$

De randvoorwaarden op  $x = 0$  zijn:

$$T_{iso}(0, t) = T_{begin}, T_{pijp}(0, t) = T_{begin} \text{ en } T_{water}(0, t) = T_{begin}.$$

En de randvoorwaarden op  $x = H$  zijn voor  $t > 0$ :

$$T_{iso}(H, t) = T_{omg}, T_{pijp}(H, t) = T_{omg} \text{ en } T_{water}(H, t) = T_{omg}.$$

We kunnen nu de stelsels vergelijkingen voor de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde warmtapwaterleiding numeriek oplossen, hiervoor gebruiken we dezelfde oplossingsmethode als gebruikt voor het oplossen van de stationaire warmtapwaterleiding-probleem.

## 7.2 Numerieke oplossing

### 7.2.1 Niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding

Bij de numerieke oplossingsmethode zullen we de vergelijkingen (63) en (64) discretiseren, hierbij benaderen we de tweede afgeleide door de centrale differentie te gebruiken en maken we gebruik van Euler achterwaarts voor de tijdsintegratie, omdat die onvoorwaardelijk stabiel is.

Voor de discretisatie delen we het interval  $[0, L]$  op in  $N$  deelintervallen met lengte  $\Delta x$ . Voor het stelsel (63) en (64) krijgen we na discretisatie de volgende vergelijkingen:

$$n \frac{du_j}{dt} = a \left( \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} \right) + c(v_j - u_j) - b(u_j - T_{omg}); \quad (67)$$

$$z \frac{dv_j}{dt} = d \left( \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{\Delta x^2} \right) - l(v_j - u_j). \quad (68)$$

waarbij  $u_j$  de numerieke benadering is voor  $T_{pijp}$  en  $v_j$  de benadering is voor  $T_{water}$ , op  $x = j\Delta x$  met  $j = 0, \dots, N$ .

Uit de randvoorwaarden op  $x = 0$  volgt:  $u_0 = v_0 = T_{begin}$ . En op  $x = H$  geldt:

$$u_N = v_N = T_{omg}.$$

Voor het differentieschema (67) en (68) met de bovengenoemde randvoorwaarden kunnen we de matrix-vector notatie  $M \frac{d\mathbf{w}}{dt} = S\mathbf{w} + \mathbf{f}$  gebruiken.

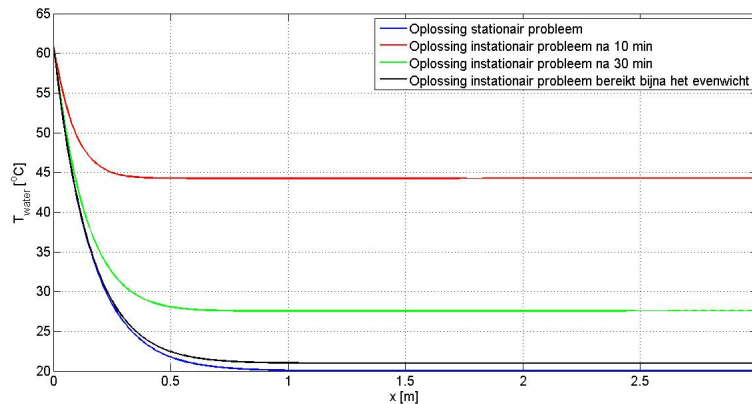
Euler achterwaarts geeft dan de formule:

$$M\mathbf{w}_{k+1} = M\mathbf{w}_k + \Delta t(S\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{f}),$$

waarbij  $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}(t_k)$  met  $t_k = k\Delta t$  voor een gegeven  $\Delta t$  en  $k \in \mathbb{N}$ .

Voor het oplossen van dit stelsel maken we gebruik van het rekenpakket Matlab. In Appendix I is het programma voor de niet-geïsoleerde leiding te zien. We beschouwen hierbij een horizontale warmtapwaterleiding die 3 m lang is, aan  $H$  kennen we de waarde zes toe.

In Figuur 18 zijn de numerieke oplossingen van  $T_{water}$  getekend, bij  $T_{begin} = 65^\circ C$ , op verschillende tijdstippen  $t$  en voor  $x \in [0, 3]$ , in het geval van een niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding.



Figuur 18: Numerieke oplossing van  $T_{water}$  bij een niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding

Voor de oplossingen voor andere waarden van  $T_{begin}$  zie Appendix K.

In deze oplossingen is gekozen voor  $\Delta t = 1 \text{ min}$  en zijn we gestopt met rekenen op tijdstip  $t_{eind}$ , waarop het verschil tussen de oplossing van het instationaire probleem en de oplossing van het stationaire probleem maximaal één graad Celsius is.

## 7.2.2 Geïsoleerde warmtapwaterleiding

We bekijken nu de geïsoleerde leiding, hierbij hoort het vereenvoudigde stelsel differentiaalvergelijkingen (64), (65) en (66).

De numerieke aanpak bij het berekenen van het temperatuurverloop voor de geïsoleerde leiding is analoog aan de aanpak bij de niet-geïsoleerde leiding waarbij we (64), (65) en (66) gaan discretiseren. We krijgen dus het volgende differentieschema:

$$y \frac{di_j}{dt} = p \left( \frac{i_{j-1} - 2i_j + i_{j+1}}{\Delta x^2} \right) + m(u_j - i_j) - s(i_j - T_{omg}); \quad (69)$$

$$n \frac{du_j}{dt} = a \left( \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} \right) + c(v_j - u_j) - m(u_j - i_j); \quad (70)$$

$$z \frac{dv_j}{dt} = d \left( \frac{v_{j-1} - 2v_j + v_{j+1}}{\Delta x^2} \right) - l(v_j - u_j). \quad (71)$$

Hierbij zijn  $u_j$ ,  $v_j$  en  $i_j$  de numerieke benaderingen voor resp.  $T_{pijp}$ ,  $T_{water}$  en  $T_{iso}$  op  $x = j\Delta x$  met  $j = 0, \dots, N$ .

De randvoorwaarden voor de geïsoleerde warmtapwaterleiding worden gegeven door:

$$i_0 = u_0 = v_0 = T_{begin} \text{ en } i_N = u_N = v_N = T_{omg}.$$

We kunnen hier ook de matrix-vector notatie toepassen, en het differentieschema met de bijbehorende randvoorwaarden schrijven als  $M \frac{d\mathbf{w}}{dt} = S\mathbf{w} + \mathbf{f}$ .

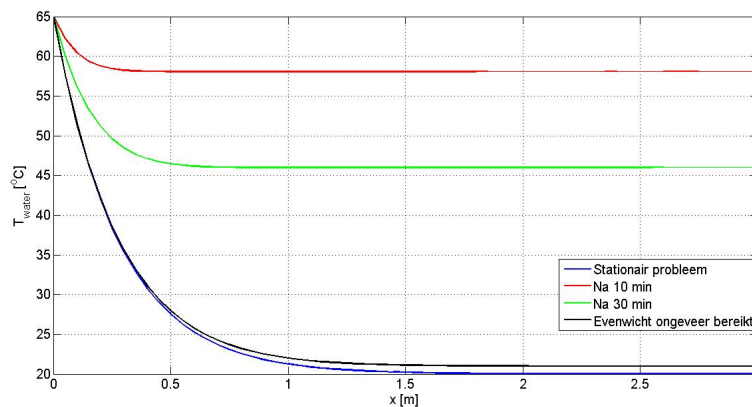
Ook hier geeft Euler achterwaarts de formule:

$$M\mathbf{w}_{k+1} = M\mathbf{w}_k + \Delta t(S\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{f}),$$

waarbij  $\mathbf{w}_k = \mathbf{w}(t_k)$  met  $t_k = k\Delta t$  voor een gegeven  $\Delta t$  en  $k \in \mathbb{N}$ .

Dit wordt opgelost met het rekenpakket Matlab. In Appendix J is het programma voor de geïsoleerde leiding te zien.

In Figuur 19 zien we het verloop van de watertemperatuur bij de geïsoleerde gesloten warmtapwaterleiding, bij  $T_{begin} = 65 \text{ } ^\circ\text{C}$ , voor verschillende tijdstippen  $t$ .



Figuur 19: Numerieke oplossingen van  $T_{water}$  bij de geïsoleerde warmtapwaterleiding

Voor de oplossingen voor andere waarden van  $T_{begin}$  zie Appendix L.

### 7.3 Legionella-wetgeving

We moeten nu controleren of de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde leidingen voldoen aan de Legionella-wetgeving. Evenals in §5.3 zullen we, voor de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde leiding, de lengte van de buis  $L_{leg}$  gaan bepalen waarin zich water bevindt met temperatuur tussen 25 en 55 graden Celsius ( $25 \leq T_{water} \leq 55$ ). We bepalen deze lengte iedere minuut, vanaf het begin (op  $t = 0$ ) totdat het verschil tussen de oplossing van het instationaire probleem en de oplossing van het stationair probleem maximaal één graad Celsius is (op  $t = t_{eind}$ ).

De som van deze lengtes  $L_{leg,tot}$  bepaalt uiteindelijk of we wel of niet gaan isoleren, want de leiding met de kortste totale lengte  $L_{leg,tot}$  voldoet het best aan de Legionella-wetgeving.

In Tabel 6 zijn de resultaten voor de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde leiding te zien.

	$T_{begin}$	$t_{eind}$	$L_{leg,tot}$
Niet-geïsoleerde leiding:	65 °C	67 min	107,91 m
	63 °C	66 min	108,47 m
	61 °C	65 min	111,06 m
Geïsoleerde leiding:	65 °C	201 min	347,80 m
	63 °C	199 min	345,75 m
	61 °C	196 min	352,75 m

Tabel 6: De som van de lengtes van de buis met watertemperatuur tussen 25 °C en 55 °C

We zien dat de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding, voor de verschillende waarden van  $T_{begin}$ , het beste voldoet aan de Legionella-wetgeving. Het advies uit het oogpunt van de bestrijding van de legionellabacterie is diensgevolge om de warmtapwaterleiding niet te isoleren.



## 8 Conclusies

In dit verslag hebben we het probleem van warmteverlies door een circulatieleiding onderzocht. Om dit probleem te kunnen oplossen hebben we het eerst vereenvoudigd door middel van een aantal aannames, en uit het vereenvoudigde probleem hebben we een wiskundig model geconstrueerd.

We hebben het verloop van de temperatuur in de niet-geïsoleerde circulatieleiding analytisch en numeriek bepaald. Bij het vergelijken van beide oplossingen, blijkt de numerieke oplossing voor kleine waarden van  $\Delta x$  heel goed overeen te komen met de analytische oplossing. Onze numerieke oplossingsmethode is dus goed genoeg om mee verder te werken.

Met behulp van het rekenprogramma Matlab hebben we voor de niet-geïsoleerde en de geïsoleerde circulatieleiding het temperatuurverloop bepaald. Door middel hiervan is de verbruikte energie bij het verwarmen van het water berekend, en zijn de jaarlijkse aardgaskosten bepaald.

Zoals verwacht leidt het isoleren van de circulatieleiding tot een energie- en dus kostenbesparing. Wat niet te verwachten was, is dat we ongeveer 1.800,- euro kunnen besparen door te isoleren. Het energieverbruik bij warmtetransport tussen de circulatieleiding en zijn aftakkingen blijkt, ten opzichte hiervan, verwaarloosbaar klein te zijn.

We hebben ook het probleem van de Legionellabacterie bij warmtapwaterleidingen onderzocht. Bij de geïsoleerde en de niet-geïsoleerde leiding, bepaalden we de lengte van de buis waarin zich water bevindt met temperaturen tussen de 25 en de 55 graden Celsius. In dit temperatuurinterval is de groei van de legionellabacteriën optimaal.

Om aan de Legionella-wetgeving te voldoen, moet de lengte van de buis, met watertemperatuur tussen de 25 en de 55 graden Celsius, minimaal zijn. Uit onze onderzoek blijkt dat de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding hier het beste aan voldoet. Uit het oogpunt van de bestrijding van de Legionellabacterie is het advies dus om de warmtapwaterleiding niet te isoleren.

## Appendix

### A Symbolen- en waardenlijst

#### A.1 Symbolenlijst

<i>Symbol</i>	<i>Betekenis</i>	<i>Eenheid</i>
$A$	Oppervlakte waardoor warmteoverdracht plaatsvindt.	$m^2$
$C$	Soortelijke warmte.	$J/(kg \text{ } ^\circ C)$
$h$	Warmtedoorgangscoefficiënt.	$W/(m^2 K)$
$k$	Warmtegeleidingscoëfficiënt, (we beschouwen deze coëfficiënten per graden Celsius).	$W/(mK)$
$L$	Lengte van de leiding.	$m$
$\dot{m}$	Het massadebiet dat door de leiding gaat.	$kg/s$
$q$	Warmtestroom per tijdseenheid.	$W$
$r_{in}$	Afstand van de $x$ -as tot de binnenwand van de leiding.	$m$
$r_{uit}$	Afstand van de $x$ -as tot de buitenwand van de leiding.	$m$
$r_{iso}$	Afstand van de $x$ -as tot de buitenkant van de isolatielaag.	$m$
$T$	De temperatuur.	$^\circ C$
$T_{omg}$	Temperatuur van de omgeving.	$^\circ C$
$u$	Warmteoverdrachtscoëfficiënt, (we beschouwen deze coëfficiënt per graden Celsius).	$W/(m^2 K)$
$v$	De doorsnede-gemiddelde stroomsnelheid.	$m/s$
$\mu$	Dynamische viscositeit van het stromende medium.	$Pa \cdot s$
$\rho$	Dichtheid van het water.	$kg/m^3$

#### A.2 Geïntroduceerde symbolen

In §4.2 en §4.3.2 hebben we nieuwe symbolen geïntroduceerd om de differentiaalvergelijkingen te vereenvoudigen. De betekenis van deze symbolen is te vinden in onderstaande tabel.

<i>Symbol</i>	<i>Betekenis</i>
$a$	$k_{pijp}(r_{uit}^2 - r_{in}^2)$
$b$	$2u_{pijp \rightarrow omg} r_{uit}$
$c$	$2u_{water \rightarrow pijp} r_{in}$
$d$	$k_{water} r_{in}$
$f$	$C_{water} \dot{m}$
$g$	$2\pi u_{water \rightarrow pijp} r_{in}$
$l$	$2u_{water \rightarrow pijp}$
$m$	$2u_{pijp \rightarrow iso} r_{uit}$
$n$	$C_{pijp} \rho_{pijp} (r_{uit}^2 - r_{in}^2)$
$p$	$k_{iso} (r_{iso}^2 - r_{uit}^2)$
$s$	$2u_{iso \rightarrow omg} r_{iso}$
$y$	$C_{iso} \rho_{iso} (r_{iso}^2 - r_{uit}^2)$
$z$	$C_{water} \rho_{water} r_{in}$

### A.3 Waardenlijst

In onderstaande tabel zijn de gebruikte waarden te vinden. Deze waarden hebben we gekregen via het bedrijf **Van Galen Klimatechniek**<sup>2</sup> en via het bedrijf **Armacell**<sup>3</sup> die het isolatiemateriaal levert.

<i>Symbol</i>	<i>Waarde</i>
$C_{iso}$	1.300 $J/(kg^{\circ}C)$
$C_{pijp}$	380 $J/(kg^{\circ}C)$
$C_{water}$	4.186 $J/(kg^{\circ}C)$
$h_l$ (horizontaal)	15 $W/(m^2K)$
$h_l$ (verticaal)	5 $W/(m^2K)$
$h_w$	15.000 $W/(m^2K)$
$k_{iso}$	0,037 $W/(mK)$
$k_{pijp}$	401 $W/(mK)$
$k_{water}$	0,60 $W/(mK)$
$L$ (circulatieleiding)	100 $m$
$L$ (warmtapwaterleiding)	3 $m$
$\dot{m}$	0,24 $kg/s$
$r_{in}$ (circulatieleiding)	$9,9 \cdot 10^{-3} m$
$r_{in}$ (warmtapwaterleiding)	$6,5 \cdot 10^{-3} m$
$r_{iso}$ (circulatieleiding)	$20 \cdot 10^{-3} m$
$r_{iso}$ (warmtapwaterleiding)	$16,5 \cdot 10^{-3} m$
$r_{uit}$ (circulatieleiding)	$11 \cdot 10^{-3} m$
$r_{uit}$ (warmtapwaterleiding)	$7,5 \cdot 10^{-3} m$
$T_{begin}$ (aan het begin van de circulatieleiding)	65 $^{\circ}C$
$T_{begin}$ (halverwege de circulatieleiding)	63 $^{\circ}C$
$T_{begin}$ (aan het eind van de circulatieleiding)	61 $^{\circ}C$
$T_{omg}$ (circulatieleiding)	24 $^{\circ}C$
$T_{omg}$ (warmtapwaterleiding)	20 $^{\circ}C$
$\mu$	$4,668 \cdot 10^{-4} Pa \cdot s$
$\rho_{iso}$	15 $kg/m^3$
$\rho_{pijp}$	8.960 $kg/m^3$
$\rho_{water}$	$1,0 \cdot 10^3 kg/m^3$

<sup>2</sup>www.vangalen.com

<sup>3</sup>www.armacell.com

## B Getal van Reynolds

Het Getal van Reynolds is het belangrijkste dimensieloze getal uit de stromingsleer. Het wordt gebruikt om te bepalen of een stroming laminair of turbulent is.

Het Reynoldsgetal  $Re$  is vernoemd naar Osbourne Reynolds (1842-1912), en luidt:

$$Re = \frac{v \cdot 2r_{in} \cdot \rho}{\mu}.$$

Zie voor de betekenis van de symbolen en de eenheden daarvan de symbolenlijst (Appendix A.1).

Bij lage waarden van  $Re$  is een stroming laminair, bij hoge waarden turbulent. Stroming in buizen is bijvoorbeeld laminair als  $Re < \text{circa } 2.300$ , en turbulent wanneer  $Re > \text{circa } 3.500$ .

Voor stromend water met een gemiddelde temperatuur van ongeveer  $60^\circ C$  geldt:

De dynamische viscositeit  $\mu = 4,668 \cdot 10^{-4} Pa \cdot s$ .

De dichtheid van het water  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 kg/m^3$ .

En in ons geval geldt ook:

De binnenstraal van de leidingwand van de circulatieleiding  $r_{in} = 9,9 \cdot 10^{-3} m$ .

Het massadebiet dat door de leiding gaat  $\dot{m} = 0,24 kg/s$ .

Uit het massadebiet moeten we de stroomsnelheid bepalen, dit volgt uit de formule:

$$\dot{m} = \rho A v,$$

waarbij  $A$  de oppervlakte is van de dwarsdoorsnede van de leidingwand, hiervoor geldt dus:

$$A = \pi r_{in}^2 = \pi(9,9 \cdot 10^{-3})^2 \approx 3,08 \cdot 10^{-4} m^2.$$

Dus voor de stroomsnelheid geldt:  $v \approx 0,779 m/s$ .

Hieruit volgt voor het getal van Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot 2r_{in} \cdot \rho}{\mu} \approx \frac{0,779 \cdot 1,98 \cdot 10^{-2} \cdot 1,0 \cdot 10^3}{4,668 \cdot 10^{-4}} \approx 33.062.$$

We zien dat in dit geval  $Re \gg 3.500$ , waaruit volgt dat de stroming in onze circulatieleiding turbulent is.

Een turbulente stroming kenmerkt zich door het wervelende karakter; de stroming loopt niet netjes gelaagd, maar verplaatst zich in wervels. Er vindt veel stroming loodrecht op de hoofdstroom plaats.

Door de aanwezigheid van wervels is de menging in een turbulente stroming veel sterker dan in een laminaire stroming.

## C De warmteoverdrachtscoëfficiënt $u$

In de meeste warmteoverdrachtsprocessen, stroomt de warmte door een serie lagen. Deze lagen zijn veelal van verschillende materialen met verschillende diktes en eigenschappen.

De warmtedoorgangscöëfficiënt  $h$  is een maat voor de geleiding en is dus afhankelijk van het materiaal waaruit een stof bestaat, voor een vlakke plaat met dikte  $D$  en warmtegeleidingcoëfficiënt  $k$ , geldt dan:

$$h = \frac{k}{D}.$$

Voor de leidingwand en de isolatielaag nemen we aan dat deze lagen vlakke platen zijn en dus geen cilinders.

Voor stoffen als water en lucht, is een interval experimenteel bepaald waarin de warmtedoorgangscöëfficiënt ligt, zie Tabel 7.

	$h(W/m^2 \text{ } ^\circ C)$		
gas (vrije convectie)	5	-	15
gas (gedwongen stroming)	10	-	100
vloeistof (vrije convectie)	50	-	1.000
vloeistof (gedwongen stroming)	500	-	3.000 (water $5\times$ zo hoog)
condenseren van damp	1.000	-	4.000 (water $5\times$ zo hoog)
koken van vloeistof	1.000	-	20.000 (water $3\times$ zo hoog)

Tabel 7: De warmtedoorgangscöëfficiënt  $h$  van water en lucht [2]

De warmteoverdrachtscoëfficiënt  $u$  is dan een mate voor de warmtestroom tussen twee lagen van verschillende materialen, deze coëfficiënt is dan ook afhankelijk van de warmtedoorgangscöëfficiënten van de verschillende lagen, deze afhankelijkheid kunnen we als volgt formuleren:

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2},$$

waarbij  $h_1$  de warmtedoorgangscöëfficiënt van de eerste laag is en  $h_2$  de warmtedoorgangscöëfficiënt is van de tweede laag.

Laat  $h_l$  de warmtedoorgangscöëfficiënt zijn van lucht bij vrije convectie en  $h_w$  de coëfficiënt van water zijn bij een gedwongen stroming.

Dan geldt voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $u$  tussen het water en de leidingwand:

$$u_{water \rightarrow pijp} = \frac{1}{\frac{1}{h_w} + \frac{(r_{uit} - r_{in})/2}{k_{pijp}}}.$$

Voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $u$  tussen de leidingwand en de isolatielaag geldt:

$$u_{pijp \rightarrow iso} = \frac{1}{\frac{(r_{uit} - r_{in})/2}{k_{pijp}} + \frac{(r_{iso} - r_{uit})/2}{k_{iso}}}.$$

En voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt  $u$  tussen de isolatielaag en de lucht geldt:

$$u_{iso \rightarrow omg} = \frac{1}{\frac{1}{h_l} + \frac{(r_{iso} - r_{uit})/2}{k_{iso}}}.$$

Voor de betekenis van de symbolen en de eenheden daarvan zie de symbolenlijst (Appendix A.1).

In Tabel 1 hebben we gezien dat de warmtedoorgangscoefficiënt  $h$  van water en lucht in een interval ligt. Behalve de eigenschappen van deze stoffen spelen er dus andere factoren een rol bij het bepalen van deze coëfficiënt.

Bij vrije convectie stroomt de lucht in verticale richting. In het geval van een horizontale leiding, moeten de luchtdeeltjes dus een kortere afstand afleggen langs de leiding dan wanneer we met een verticale leiding te maken hebben.

De stromende lucht langs de leiding neemt warmte op. Omdat lucht in een verticale opstelling een grotere afstand moet afleggen langs de leiding, zullen de luchtdeeltjes in het begin van de leiding al genoeg warmte hebben opgenomen waardoor er steeds minder warmteoverdracht plaatsvindt tussen de leidingwand en de lucht.

De gemiddelde warmteoverdracht per oppervlakte-eenheid is bij een verticale leiding dus lager dan bij een horizontale leiding. We nemen aan dat  $h_l$  bij vrije convectie in het geval van een verticale opstelling kleiner zal zijn dan wanneer we te maken hebben met een horizontale opstelling.

## D Maple-programma voor de analytische oplossingsmethode

```
> rin := 9.9*10(-3):
> ruit := 11.0*10(-3):
> kpijp := 401:
> a := kpijp*(ruit2-rin2):
> hl := 15:
> upijpomg := 1/(((ruit-rin)/2)/kpijp)+(1/hl)):
> b := 2*upijpomg*ruit:
> hw := 3000*5:
> uwaterpijp := 1/((1/hw)+(((ruit-rin)/2)/kpijp)):
> c := 2*uwaterpijp*rin:
> Cwater := 4186:
> mdebiet := 0.24:
> f := Cwater*mdebiet:
> g := evalf(2*Pi*uwaterpijp*rin):
> Tomg := 24:
> L := 100:
We lossen nu de derdegraadsvergelijking (21) op:
> ew := solve(a*f*lambda3+a*g*lambda2-(b+c)*f*lambda-b*g = 0, lambda);
          ew := 177.3169138, -0.1030747312e-2, -178.2259043
> ev1 := [f*ew[1]+g,g];
          ev1 := [1.790539081*105, 914.2437633]
> ev2 := [f*ew[2]+g,g];
          ev2 := [913.2082333, 914.2437633]
> ev3 := [f*ew[3]+g,g];
          ev3 := [-1.781386287*105, 914.2437633]
> Tpijp := n1*ev1[1]*exp(ew[1]*x)+n2*ev2[1]*exp(ew[2]*x)
          + n3*ev3[1]*exp(ew[3]*x)+Tomg:
> Twater := n1*ev1[2]*exp(ew[1]*x)+n2*ev2[2]*exp(ew[2]*x)
          + n3*ev3[2]*exp(ew[3]*x)+Tomg:
> n := solve({n1*ev1[1]+n2*ev2[1]+n3*ev3[1]+Tomg = 65,
             n1*ev1[2]+n2*ev2[2]+n3*ev3[2]+Tomg = 65,
             n1*ew[1]*ev1[1]*exp(ew[1]*L) + n2*ew[2]*ev2[1]*exp(ew[2]*L)
             + n3*ew[3]*ev3[1]*exp(ew[3]*L) = 0}, [n1,n2,n3]);
n:=[[n1=2.010140856*10(-7710),n2=0.4484606706e-1,n3=-2.593616466*10(-7)]]

> Tpijp := n1*ev1[1]*exp(ew[1]*x) + n2*ev2[1]*exp(ew[2]*x)
          + n3*ev3[1]*exp(ew[3]*x) + Tomg;
Tpijp := 3.599235761*10(-7705)*exp(177.3169138*x)+40.95379767*
exp(-0.1030747312e-2*x) + 0.4620232806e-1*exp(-178.2259043*x)+24

> Twater := n1*ev1[2]*exp(ew[1]*x) + n2*ev2[2]*exp(ew[2]*x)
          + n3*ev3[2]*exp(ew[3]*x) + Tomg;
Twater := 1.837758741*10(-7707)*exp(177.3169138*x)+41.00023712*
exp(-0.1030747312e-2*x) - 0.2371197678e-3*exp(-178.2259043*x)+24
```

We hebben gezien dat voor de watertemperatuur geldt:

$$T_{water} = 1,838 \cdot 10^{-7707} e^{177,317x} + 41e^{-0,001x} - 0,237 \cdot 10^{-3} e^{-178,226x} + 24.$$

De term  $1,838 \cdot 10^{-7707} e^{177,317x}$  is voor  $x \in [0, 100]$  door een normale computer niet te berekenen, we zullen deze term proberen af te schatten. We weten dat  $e^{2,31} \approx 10$ , dus voor  $x = 100$  geldt:

$$1,838 \cdot 10^{-7707} e^{17731,7} \approx 1,838 \cdot 10^{-7707} (e^{2,31})^{7676} \approx 1,838 \cdot 10^{-31}.$$

Hieruit volgt dat deze term, bij benadering, hoogstens  $1,838 \cdot 10^{-31}$  is voor  $x \in [0, 100]$ , we kunnen de term dus verwaarlozen.

Dit geldt ook voor de term  $3,599 \cdot 10^{-7705} e^{177,317x}$  in het functievoorschrift voor de temperatuur van de leidingwand:

$$T_{pijp} = 3,599 \cdot 10^{-7705} e^{177,317x} + 40,954e^{-0,001x} + 0,046e^{-178,226x} + 24.$$

Deze functie kunnen we dus vereenvoudigen naar:

$$T_{pijp} = 40,954e^{-0,001x} + 0,046e^{-178,226x} + 24.$$



## E Matlab-programma voor de niet-geïsoleerde circulatieleiding

```
% interval:
L = 100;
dx = 0.1;
N = L/dx;
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx; % Vector x
end
% gegeven:
k_pijp = 401;
r_in = 9.9*10(-3);
r_uit = 11.0*10(-3);
a = k_pijp * (r_uit2-r_in2);
h_l = 15;
u_pijpomg = 1/((((r_uit-r_in)/2)/k_pijp)+(1/h_l));
b = 2 * r_uit * u_pijpomg;
h_w = 15000;
u_waterpijp = 1/(((1/h_w)+((r_uit-r_in)/2)/k_pijp));
c = 2 * r_in * u_waterpijp;
C_water = 4186;
m_debiet = 0.24;
f = C_water * m_debiet;
g = 2 * pi * r_in * u_waterpijp;
T_omg = 24;
% randvoorwaarden:
u_0 = 65;
v_0 = 65;
% Construeren matrix A, laat A_1 de linksboven deelmatrix van A zijn:
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = a / (dx2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = a / (dx2);
end
hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 2)
    hoofddiag(i) = ((-2*a) / (dx2)) - (b + c);
end
hoofddiag(N - 1) = (-a / (dx2)) - (b + c);
A_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
A_1 = full(A_1);

% Laat A_2 de rechtsboven deelmatrix van A zijn:
A_2 = zeros(N-1,N);
```

```

for i = 1 : N-1
    A_2(i,i) = c;
end
A_2;
% A_3 is de linksonder deelmatrix van A
A_3 = zeros(N,N-1);
for i = 1 : N-1
    A_3(i,i) = -g;
end
A_3(N,N-1) = -g;
A_3;
% A_4 is de rechtsonder deelmatrix van A
bovendiag1 = zeros(N,1);
for i = 1 : N
    bovendiag1(i) = 0;
end
onderdiag1 = zeros(N,1);
for i = 1 : N
    onderdiag1(i) = -f/dx;
end
hoofddiag1 = zeros(N,1);
for i = 1 : N
    hoofddiag1(i) = (f/dx) + g;
end
A_4 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovendiag1], -1:1,N,N);
A_4 = full(A_4);
A = [A_1 A_2;A_3 A_4]; % De matrix A
% We construeren nu matrix b, met b_1 de boven deelvector van b:
b_1 = zeros(N-1,1);
b_1(1) = -b * T_omg - (a/(dx^2))*u_0;
for i = 2 : N-1
    b_1(i) = -b * T_omg;
end
% b_1 is de onder deelvector van b:
b_2 = zeros(N,1);
b_2(1) = (f/dx)*v_0;
b = [b_1;b_2]; % De vector b
w = A\b; % De vector w met u en v waarden
% We construeren nu een vector v met de v waarden op x_i:
v = zeros(N+1,1);
v(1) = v_0;
for i = 2 : N+1
    v(i) = w((N-1)+i-1);
end
plot(x,v) % Grafiek van T_water

```

## F Matlab-programma voor de geïsoleerde circulatieleiding

```
% interval:
L = 100;
dx = 0.1;
N = L/dx;
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx; % Vector x
end
% gegeven:
k_pijp = 401;
r_in = 9.9*10(-3);
r_uit = 11.0*10(-3);
a = k_pijp * (r_uit2-r_in2);
h_w = 15000;
u_waterpijp = 1/(((1/h_w)+((r_uit-r_in)/2)/k_pijp));
c = 2 * r_in * u_waterpijp;
C_water = 4186;
m_debiet = 0.24;
f = C_water * m_debiet;
g = 2 * pi * r_in * u_waterpijp;
r_iso = r_uit + 9*10(-3);
k_iso = 0.037;
u_pijpiso = 1/((((r_uit-r_in)/2)/k_pijp)+(((r_iso-r_uit)/2)/k_iso));
m = 2 * r_uit * u_pijpiso;
p = k_iso * (r_iso2-r_uit2);
h_l = 15;
u_isoomg = 1/((((r_iso-r_uit)/2)/k_iso)+(1/h_l));
s = 2 * r_iso * u_isoomg;
T_omg = 24;
% randvoorwaarden
u_0 = 65;
v_0 = 65;
i_0 = 65;
% Construeren matrix B, B_1 is de linksboven deelmatrix van B:
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = p / (dx2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = p / (dx2);
end
hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 2)
    hoofddiag(i) = ((-2*p) / (dx2)) - (m + s);
end
hoofddiag(N - 1) = (-p / (dx2)) - (m + s);
B_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
```

```

B_1 = full(B_1);
% B_2 is de middelste deelmatrix van B in eerste rij van deelmatrices:
B_2 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    B_2(i,i) = m;
end
% matrix B_3 is de rechtsboven deelmatrix van B
B_3 = zeros(N-1,N);
% matrix B_4 is de eerste deelmatrix van B in de middelste rij:
B_4 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    B_4(i,i) = m;
end
% matrix B_5 is de middelste deelmatrix van B
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = a / (dx^2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = a / (dx^2);
end
hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 2)
    hoofddiag(i) = ((-2*a) / (dx^2)) - (m + c);
end
hoofddiag(N - 1) = (-a / (dx^2)) - (m + c);
B_5 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
B_5 = full(B_5);
% matrix B_6 is de laatste deelmatrix van B in de middelste rij:
B_6 = zeros(N-1,N);
for i = 1 : N-1
    B_6(i,i) = c;
end
% matrix B_7 is de linksonder deelmatrix van B
B_7 = zeros(N,N-1);
% matrix B_8 is de middelste deelmatrix van B in de onderste rij:
B_8 = zeros(N,N-1);
for i = 1 : N-1
    B_8(i,i) = -g;
end
B_8(N,N-1) = -g;

% matrix B_9 is de rechtsonder deelmatrix van B
bovendiag1 = zeros(N,1);
for i = 1 : N
    bovendiag1(i) = 0;

```

```

end
onderdiag1 = zeros(N,1);
for i = 1 : N
    onderdiag1(i) = -f/dx;
end
hoofddiag1 = zeros(N,1);
for i = 1 : N
    hoofddiag1(i) = (f/dx) + g;
end
B_9 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovenddiag1], -1:1,N,N);
B_9 = full(B_9);
B = [B_1 B_2 B_3;B_4 B_5 B_6;B_7 B_8 B_9]; % De matrix B
% We construeren nu de vector r
r_1 = zeros(N-1,1);
r_1(1) = -s * T_omg - (p/(dx^2))*i_0;
for i = 2 : N-1
    r_1(i) = -s * T_omg; % rechterlid behorende bij de i-waarden
end
r_2 = zeros(N-1,1); % rechterlid behorende bij de u-waarden
r_2(1) = (-a/dx)*u_0;
r_3 = zeros(N,1); % rechterlid behorende bij de v-waarden
r_3(1) = (f/dx)*v_0;
r = [r_1;r_2;r_3]; % De vector r
w = B\r; % De vector w
v = zeros(N+1,1);
v(1) = v_0;
for i = 2 : N+1
    v(i) = y(2*(N-1)+i-1);% De vector v
end
plot(x,v,'r') % Grafiek van T_water

```

## G Matlab-programma voor de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding (Stationair)

```

% interval
L = 3;
dx = 0.002;
N = L/dx;
% We construeren nu de vector x, met x = 0, ..., L.
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx;
end
% gegevens
k_pijp = 401;
r_in = 6.5*10(-3);
r_uit = 7.5*10(-3);
a = k_pijp * (r_uit2-r_in2);
h_l = 15;
u_pijpomg = 1/(((r_uit-r_in)/2)/k_pijp)+(1/h_l));
b = 2 * r_uit * u_pijpomg;
h_w = 15000;
u_waterpijp = 1/((1/h_w)+((r_uit-r_in)/2)/k_pijp));
c = 2 * r_in * u_waterpijp;
k_water = 0.60;
d = k_water * r_in;
l = 2 * u_waterpijp;
% Temperatuur in begin; halverwege of eind circulatieleiding,
% we nemen hier de niet-geïsoleerde circulatieleiding
% omdat die het meeste temperatuursverschil geeft.
T_begin = 65; % 63; 61;
T_omg = 20;
% randvoorwaarden
u_0 = T_begin;
u_N = T_omg;
v_0 = T_begin;
v_N = T_omg;
%Construeren matrix A, laat A_1 de linksboven deelmatrix van A zijn:
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = a / (dx2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = a / (dx2);
end
hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    hoofddiag(i) = ((-2*a) / (dx2)) - (b + c);
end

```

```

A_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
A_1 = full(A_1);
% Laat A_2 de rechtsboven deelmatrix van A zijn:
A_2 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    A_2(i,i) = c;
end
A_2;
% A_3 is de linksonder deelmatrix van A
A_3 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    A_3(i,i) = -1;
end
A_3;
% A_4 is de rechtsonder deelmatrix van A
bovendiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag1(i) = -d/dx^2;
end
onderdiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag1(i) = -d/dx^2;
end
hoofddiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag1(i) = 2*d/dx^2 + 1;
end
A_4 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovendiag1], -1:1,N-1,N-1);
A_4 = full(A_4);
A = [A_1 A_2;A_3 A_4]; % De matrix A

% We construeren nu matrix b, met b_1 de boven deelvector van b:
b_1 = zeros(N-1,1);
b_1(1) = -b * T_omg - (a/(dx^2))*u_0;
for i = 2 : N-2
    b_1(i) = -b * T_omg;
end
b_1(N-1) = -b * T_omg - (a/(dx^2))*u_N;
% b_2 is de onder deelvector van b:
b_2 = zeros(N-1,1);
b_2(1) = (d/dx^2)*v_0;
b_2(N-1) = (d/dx^2)*v_N;
b_vector = [b_1;b_2]; % De vector b

w = A\b_vector; % De vector w met u en v waarden

% We construeren nu een vector v met de v-waarden op x_i:
v = zeros(N+1,1);
v(1) = v_0;

```

```

for i = 2 : N
    v(i) = w((N-1)+i-1);
end
v(N+1) = v_N;
plot1 = plot(x,v,'r'); % Grafiek van T_water
set(plot1,'LineWidth',2);
xlabel('x [m]','FontSize',15); ylabel('T_{water} [^oC]','FontSize',15);
grid;
set(gca,'FontSize',15);

% We zullen nu L_leg bepalen
y = 1;
for t = 1 : (N+1)
    if 25 <= v(t) && v(t) <= 55
        positie(y) = t;
        y = y + 1;
    end
end
L_leg = x(positie(y - 1)) - x(positie(1))

```



## H Matlab-programma voor de geïsoleerde warmtapwaterleiding (Stationair)

```
% interval
L = 3;
dx = 0.002;
N = L/dx;
% We construeren nu de vector x, met x = 0, ..., L.
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx;
end
% gegevens
k_pijp = 390;
r_in = 6.5*10(-3);
r_uit = 7.5*10(-3);
a = k_pijp * (r_uit2-r_in2);
h_w = 5 * 3000;
u_waterpijp = 1/(((1/h_w)+((r_uit-r_in)/2)/k_pijp));
c = 2 * r_in * u_waterpijp;
k_water = 0.60;
d = k_water * r_in;
l = 2 * u_waterpijp;
r_iso = r_uit + 9*10(-3);
k_iso = 0.037;
u_pijpiso = 1/((((r_uit-r_in)/2)/k_pijp)+(((r_iso-r_uit)/2)/k_iso));
m = 2 * r_uit * u_pijpiso;
h_l = 15;
u_isoong = 1/((((r_iso-r_uit)/2)/k_iso)+(1/h_l));
s = 2 * r_iso * u_isoong;
% Temperatuur in begin; halverwege of eind circulatieleiding,
% we nemen hier de niet-geïsoleerde circulatieleiding
% omdat die het meeste temperatuursverschil geeft.
T_begin = 65; % 63; 61;
T_ong = 20;
% randvoorwaarden
u_0 = T_begin;
u_N = T_ong;
v_0 = T_begin;
v_N = T_ong;
%Construeren matrix A, laat A_1 de linksboven deelmatrix van A zijn:
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = a / (dx2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = a / (dx2);
end
```

```

hoofddiag = zeros(N-1,1);

for i = 1 : (N - 1)
    hoofddiag(i) = ((-2*a) / (dx^2)) - m + (m^2/(m+s)) - c;
end
A_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
A_1 = full(A_1);
% Laat A_2 de rechtsboven deelmatrix van A zijn:
A_2 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    A_2(i,i) = c;
end
% A_3 is de linksonder deelmatrix van A
A_3 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    A_3(i,i) = -1;
end
% A_4 is de rechtsonder deelmatrix van A
bovendiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag1(i) = -d/dx^2;
end
onderdiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag1(i) = -d/dx^2;
end
hoofddiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag1(i) = 2*d/dx^2 + 1;
end
A_4 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovendiag1], -1:1,N-1,N-1);
A_4 = full(A_4);
A = [A_1 A_2;A_3 A_4]; % De matrix A

% We construeren nu matrix r, met r_1 de boven deelvector van r:
r_1 = zeros(N-1,1);
r_1(1) = -((m*s)/(m+s)) * T_omg - (a/(dx^2))*u_0;
for i = 2 : N-2
    r_1(i) = -((m*s)/(m+s)) * T_omg;
end
r_1(N-1) = -((m*s)/(m+s)) * T_omg - (a/(dx^2))*u_N;
% r_2 is de onder deelvector van r:
r_2 = zeros(N-1,1);
r_2(1) = (d/dx^2)*v_0;
r_2(N-1) = (d/dx^2)*v_N;
r = [r_1;r_2]; % De vector r

w = A\r; % De vector w met u en v waarden

```

```

% We construeren nu een vector v met de v-waarden op x_i:
v = zeros(N+1,1);
v(1) = v_0;
for i = 2 : N
    v(i) = w((N-1)+i-1);
end
v(N+1) = v_N;
plot1 = plot(x,v,'r'); % Grafiek van T_water
set(plot1,'LineWidth',2);
xlabel('x [m]','FontSize',15); ylabel('T_{water} [^oC]','FontSize',15);
grid;
set(gca,'FontSize',15);

```

## I Matlab-programma voor de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)

```
% interval
L = 3;
H = 6;
dx = 0.01;
NL = L/dx;
N = H/dx;
% We construeren nu de vector x, met x = 0, ..., L.
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx;
end
% gegevens
k_pijp = 401;
r_in = 6.5*10(-3);
r_uit = 7.5*10(-3);
a = k_pijp * (r_uit2-r_in2);
h_l = 15;
u_pijpomg = 1/(((r_uit-r_in)/2)/k_pijp)+(1/h_l));
b = 2 * r_uit * u_pijpomg;
h_w = 5 * 3000;
u_waterpijp = 1/((1/h_w)+((r_uit-r_in)/2)/k_pijp));
c = 2 * r_in * u_waterpijp;
k_water = 0.60;
d = k_water * r_in;
l = 2 * u_waterpijp;
rho_pijp = 8960;
C_pijp = 380;
n = rho_pijp * C_pijp * (r_uit2 - r_in2);
rho_water = 1000;
C_water = 4186;
z = rho_water * r_in * C_water;
% Temperatuur in begin; halverwege; eind circulatieleiding
T_begin = 65; % 63; 61;
T_omg = 20;
dt = 60;
% randvoorwaarden
u_0 = T_begin;
u_N = T_omg;
v_0 = T_begin;
v_N = T_omg;
% We construeren matrix M, M_1 is de linksboven deelmatrix van M:
M_1 = zeros(N-1, N-1);
for i = 1 : N-1
    M_1(i,i) = n;
end
M_2 = zeros(N-1, N-1); %M_2 de rechtsboven deelmatrix van M
```

```

M_3 = zeros(N-1, N-1); %M_3 de linksonder deelmatrix van M
M_4 = zeros(N-1, N-1);
for i = 1 : N-1
    M_4(i,i) = z;      %M_4 de rechtsonder deelmatrix van M
end
M = [M_1 M_2;M_3 M_4]; % De matrix M
%Construeer matrix S, S_1 is de linksboven deelmatrix van S:
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = a / (dx^2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = a / (dx^2);
end
hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    hoofddiag(i) = ((-2*a) / (dx^2)) - (b + c);
end
S_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
S_1 = full(S_1);
% Laat S_2 de rechtsboven deelmatrix van S zijn:
S_2 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    S_2(i,i) = c;
end
% S_3 is de linksonder deelmatrix van S
S_3 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    S_3(i,i) = 1;
end
% S_4 is de rechtsonder deelmatrix van S
bovendiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag1(i) = d/dx^2;
end
onderdiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag1(i) = d/dx^2;
end
hoofddiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag1(i) = -2*d/dx^2 - 1;
end
S_4 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovendiag1], -1:1,N-1,N-1);
S_4 = full(S_4);
S = [S_1 S_2;S_3 S_4]; % De matrix S
% We construeren nu matrix f, met f_1 de boven deelvector van f:
f_1 = zeros(N-1,1);

```

```

f_1(1) = b * T_omg + (a/(dx^2))*u_0;
for i = 2 : N-2
    f_1(i) = b * T_omg;
end
f_1(N-1) = b * T_omg + (a/(dx^2))*u_N;
% f_2 is de onder deelvector van f:
f_2 = zeros(N-1,1);
f_2(1) = (d/dx^2)*v_0;
f_2(N-1) = (d/dx^2)*v_N;
f = [f_1;f_2]; % De vector f
% We construeren nu een matrix u, waarin iedere kolom de waarden van u*
% geeft in tijdstip t_k:
T = dt;
u = zeros(2*(N-1),(T/dt)+1);
% Voor t = 0
for i = 1:2*(N-1)
    u(i,1) = T_begin;
end
L_leg = 0;
while (norm(v_stationair(2:NL+1) - u(N:(N-1)+NL,T/dt),inf)) > 1
    for i = 2 : (T/dt)+1
        u(:,i) = (M-dt*S)\(M*u(:,i-1) + dt*f);
    end
    % We zullen nu L_leg bepalen
    positie = 1;
    y = 1;
    for t = N : (N-1)+NL
        if 25 <= u(t,T/dt+1) && u(t,T/dt+1) <= 55
            positie(y) = t - N + 2;
            y = y + 1;
        end
    end
end
if y == 1
    y = 2;
end
L_legtijdelijk = x(positie(y - 1)) - x(positie(1));
L_leg = L_leg + L_legtijdelijk;
T = T + dt
if T == 600
    v = zeros(NL+1,1);
    v(1) = v_0;
    for i = 2 : NL+1
        v(i) = u((N-1)+i-1,T/dt);
    end
    plot2 = plot(x(1:NL+1),v(1:NL+1),'r'); % Grafiek van T_water
    set(plot2,'LineWidth',2);
    xlabel('x [m]','FontSize',15); ylabel('T_{water} [^oC]','FontSize',15);
    %grid;
    set(gca,'FontSize',15);
end

```

```

end
if T == 1800
    v = zeros(NL+1,1);
    v(1) = v_0;
    for i = 2 : NL+1
        v(i) = u((N-1)+i-1,T/dt);
    end
    plot3 = plot(x(1:NL+1),v(1:NL+1),'g'); % Grafiek van T_water
    set(plot3,'LineWidth',2);
    xlabel('x [m]','FontSize',15); ylabel('T_{water} [^oC]','FontSize',15);
    %grid;
    set(gca,'FontSize',15);
end
end

% We construeren nu een vector v met de v-waarden op x_i:
v = zeros(NL+1,1);
v(1) = v_0;
for i = 2 : NL+1
    v(i) = u((N-1)+i-1,T/dt);
end
end
L_leg
plot4 = plot(x(1:NL+1),v(1:NL+1),'k'); % Grafiek van T_water
set(plot4,'LineWidth',2);
xlabel('x [m]','FontSize',15); ylabel('T_{water} [^oC]','FontSize',15);
grid;
set(gca,'FontSize',15);

```

## J Matlab-programma voor de geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)

```
% interval:
L = 3;
H = 6;
dx = 0.05;
NL = L/dx;
N = H/dx;
% We construeren nu de vector x, met x = 0, ..., L.
for j = 0 : N
    x(j+1) = j * dx; % Vector x
end
% gegeven:
k_pijp = 401;
r_in = 6.5*10(-3);
r_uit = 7.5*10(-3);
a = k_pijp * (r_uit2-r_in2);
h_w = 5 * 3000;
u_waterpijp = 1/(((1/h_w)+((r_uit-r_in)/2)/k_pijp));
c = 2 * r_in * u_waterpijp;
k_water = 0.60;
d = k_water * r_in;
l = 2 * u_waterpijp;
r_iso = r_uit + 9*10(-3);
k_iso = 0.037;
u_pijpiso = 1/((((r_uit-r_in)/2)/k_pijp)+(((r_iso-r_uit)/2)/k_iso));
m = 2 * r_uit * u_pijpiso;
rho_pijp = 8960;
C_pijp = 380;
n = rho_pijp * C_pijp * (r_uit2 - r_in2);
p = k_iso * (r_iso2-r_uit2);
h_l = 15;
u_isoomg = 1/((((r_iso-r_uit)/2)/k_iso)+(1/h_l));
s = 2 * r_iso * u_isoomg;
rho_iso = 15;
C_iso = 1300;
y = rho_iso * (r_iso2 - r_uit2) * C_iso;
rho_water = 1000;
C_water = 4186;
z = rho_water * r_in * C_water;
% Temperatuur in begin; halverwege; eind circulatieleiding
T_begin = 65; % 63; 61;
T_omg = 20;
dt = 60;
% randvoorwaarden
u_0 = T_begin;
u_N = T_omg;
```



```

v_0 = T_begin;
v_N = T_omg;
i_0 = T_begin;
i_N = T_omg;
% Construeer matrix M, met M_1 de linksboven deelmatrix:
M_1 = zeros(N-1, N-1);
for i = 1 : N-1
    M_1(i,i) = y;
end
M_2 = zeros(N-1, N-1); %M_2 de middenboven deelmatrix van M
M_3 = zeros(N-1, N-1); %M_3 de rechtsboven deelmatrix van M
M_4 = zeros(N-1, N-1); %M_4 de linksmidden deelmatrix van M
M_5 = zeros(N-1, N-1);
for i = 1 : N-1
    M_5(i,i) = n; %M_5 de middelste deelmatrix van M
end
M_6 = zeros(N-1, N-1); %M_6 de rechtsmidden deelmatrix van M
M_7 = zeros(N-1, N-1); %M_7 de linksonder deelmatrix van M
M_8 = zeros(N-1, N-1); %M_8 de middenonder deelmatrix van M
M_9 = zeros(N-1, N-1);
for i = 1 : N-1
    M_9(i,i) = z; %M_9 de rechtsonder deelmatrix van M
end
M = [M_1 M_2 M_3;M_4 M_5 M_6;M_7 M_8 M_9]; % De matrix M
% We construeren nu de matrix S, met S_1 de linksboven deelmatrix:
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = p / (dx^2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = p / (dx^2);
end
hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    hoofddiag(i) = ((-2*p) / (dx^2)) - (m + s);
end
S_1 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
S_1 = full(S_1);
% matrix S_2 is de middelste deelmatrix in eerste rij deelmatrices:
S_2 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    S_2(i,i) = m;
end
% matrix S_3 is de rechtsboven deelmatrix van S
S_3 = zeros(N-1,N-1);
% matrix S_4 is de eerste deelmatrix in de middelste rij deelmatrices:
S_4 = zeros(N-1,N-1);

```

```

for i = 1 : N-1
    S_4(i,i) = m;
end
% matrix S_5 is de middelste deelmatrix van S
bovendiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    bovendiag(i) = a / (dx^2);
end
onderdiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    onderdiag(i) = a / (dx^2);
end
hoofddiag = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N - 1)
    hoofddiag(i) = ((-2*a) / (dx^2)) - (m + c);
end
S_5 = spdiags([onderdiag hoofddiag bovendiag], -1:1,N-1,N-1);
S_5 = full(S_5);
% matrix S_6 is de laatste deelmatrix in de middelste rij deelmatrices:
S_6 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    S_6(i,i) = c;
end
% matrix S_7 is de linksonder deelmatrix van S
S_7 = zeros(N-1,N-1);
% matrix S_8 is de middelste deelmatrix in de onderste rij deelmatrices:
S_8 = zeros(N-1,N-1);
for i = 1 : N-1
    S_8(i,i) = 1;
end
% matrix S_9 is de rechtsonder deelmatrix van S
bovendiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    bovendiag1(i) = d/(dx^2);
end
onderdiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    onderdiag1(i) = d/dx^2;
end
hoofddiag1 = zeros(N-1,1);
for i = 1 : (N-1)
    hoofddiag1(i) = (-2*d/dx^2) - 1;
end
S_9 = spdiags([onderdiag1 hoofddiag1 bovendiag1], -1:1,N-1,N-1);
S_9 = full(S_9);
S = [S_1 S_2 S_3;S_4 S_5 S_6;S_7 S_8 S_9]; % De matrix S
% We construeren nu de vector f
f_1 = zeros(N-1,1); % rechterlid behorende bij de i-waarden
f_1(1) = s * T_omg + (p/(dx^2))*i_0;

```

```

for i = 2 : N-2
    f_1(i) = s * T_omg;
end
f_1(N-1) = s * T_omg + (p/(dx^2))*i_N;
f_2 = zeros(N-1,1);          % rechterlid behorende bij de u-waarden
f_2(1) = (a/dx^2)*u_0;
f_2(N-1) = (a/dx^2)*u_N;
f_3 = zeros(N-1,1);          % rechterlid behorende bij de v-waarden
f_3(1) = (d/dx^2)*v_0;
f_3(N-1) = (d/dx^2)*v_N;
f = [f_1;f_2;f_3];          % De vector f
% We construeren nu een matrix u,
% waarin iedere kolom de waarden van u* geeft in tijdstip t_k:
T = dt;
u = zeros(3*(N-1),(T/dt)+1);
% Voor t = 0
for i = 1:3*(N-1)
    u(i,1) = T_begin;
end
L_leg = 0;
while(norm(v_stationair(2:NL+1)-u(2*(N-1)+1:2*(N-1)+NL,T/dt),inf))>1
    for i = 2 : (T/dt)+1
        u(:,i) = (M-dt*S)\(M*u(:,i-1) + dt*f);
    end
    % We zullen nu L_leg bepalen
    positie = 1;
    y = 1;
    for t = 2*(N-1)+1 : 2*(N-1)+NL
        if 25 <= u(t,T/dt+1) && u(t,T/dt+1) <= 55
            positie(y) = t - 2*(N-1) +1;
            y = y + 1;
        end
    end
    end
    if y == 1
        y = 2;
    end
    L_legtijdelijk = x(positie(y - 1)) - x(positie(1));
    L_leg = L_leg + L_legtijdelijk;
    T = T + dt
    if T == 600
        v = zeros(NL+1,1);
        v(1) = v_0;
        for i = 2 : NL+1
            v(i) = u(2*(N-1)+i-1,T/dt);
        end
        plot2 = plot(x(1:NL+1),v(1:NL+1),'r'); % Grafiek van T_water
    end
    if T == 1800
        v = zeros(NL+1,1);

```

```

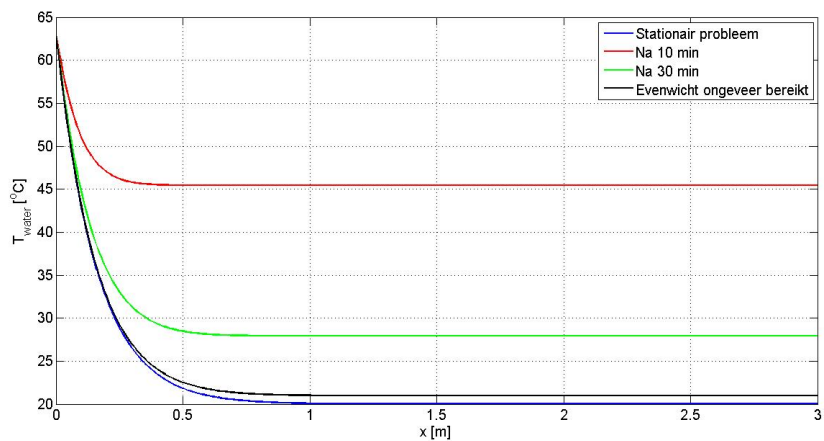
        v(1) = v_0;
        for i = 2 : NL+1
            v(i) = u(2*(N-1)+i-1,T/dt);
        end
    end
end

% We construeren nu een vector v met de v-waarden op x_i:
v = zeros(NL+1,1);
v(1) = v_0;
for i = 2 : NL+1
    v(i) = u(2*(N-1)+i-1,T/dt);
end
L_leg
plot4 = plot(x(1:NL+1),v(1:NL+1),'k'); % Grafiek van T_water
set(plot4,'LineWidth',2);
xlabel('x [m]','FontSize',15); ylabel('T_{water} [^oC]','FontSize',15);
grid;
set(gca,'FontSize',15);

```

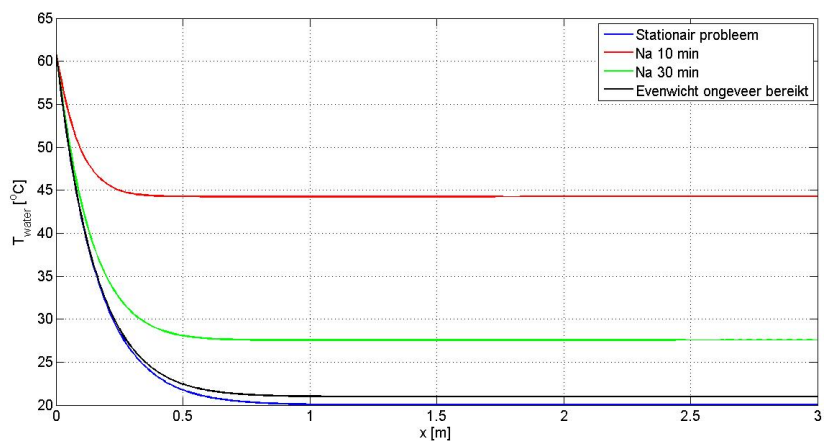
## K Numerieke oplossingen van de niet-geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)

### K.1 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 63 \text{ } ^\circ\text{C}$



Figuur 20: Numerieke oplossingen van  $T_{water}$  bij  $T_{begin} = 63 \text{ } ^\circ\text{C}$

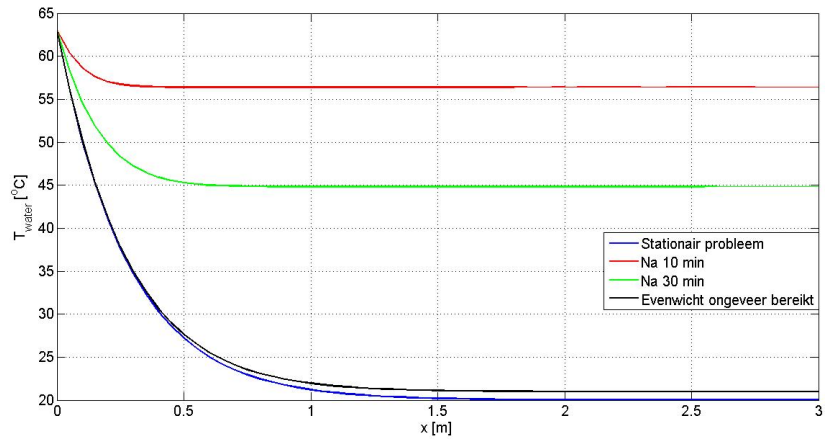
### K.2 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 61 \text{ } ^\circ\text{C}$



Figuur 21: Numerieke oplossingen van  $T_{water}$  bij  $T_{begin} = 61 \text{ } ^\circ\text{C}$

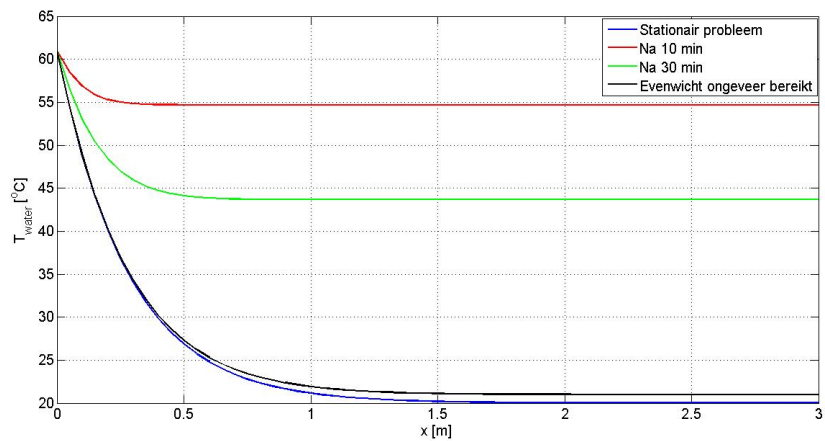
## L Numerieke oplossingen van de geïsoleerde warmtapwaterleiding (Instationair)

### L.1 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 63 \text{ }^\circ\text{C}$



Figuur 22: Numerieke oplossingen van  $T_{water}$  bij  $T_{begin} = 63 \text{ }^\circ\text{C}$

### L.2 Numerieke oplossing voor $T_{begin} = 61 \text{ }^\circ\text{C}$



Figuur 23: Numerieke oplossingen van  $T_{water}$  bij  $T_{begin} = 61 \text{ }^\circ\text{C}$

## Literatuur

- [1] D. A. Baak, O. V. Bondar: *To Isolate or Not To Isolate, That Is The Qeation*.
- [2] prof. J. M. M. Smith M.sc, dr. ir. E. Stammers: *Fysische Transportverschijnselen I*, Delftsche Uitgevers Maatschappij B. V. (1973).